

LES FONCTIONS TANGENTE ET ARC TANGENTE

1) LA FONCTION TANGENTE

Définition :

La fonction tangente, notée $\tan$, est définie pour tout réel x tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Par la suite, on note D l'ensemble de définition de la fonction tangente.

Périodicité :

La fonction $\tan$ est périodique de période π . Pour tout $x \in D$:

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$

Preuve :

Pour tout $x \in D$, $x + \pi \in D$ et :

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

On peut ainsi se contenter d'étudier la fonction tangente sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

Parité

La fonction tangente est impaire, sa courbe représentative admet donc l'origine pour centre de symétrie.

Preuve :

Pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et :

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

On peut ainsi se contenter d'étudier la fonction tangente sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$

Dérivabilité :

La fonction tangente est dérivable sur D et pour tout réel $x \in D$ on a :

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Preuve :

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur D et $\cos x \neq 0$ sur D , donc la fonction tangente est dérivable sur D et pour tout $x \in D$, on a :

$$\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Tableau de variations :

Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[$, $\tan' x > 0$ donc la fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$.

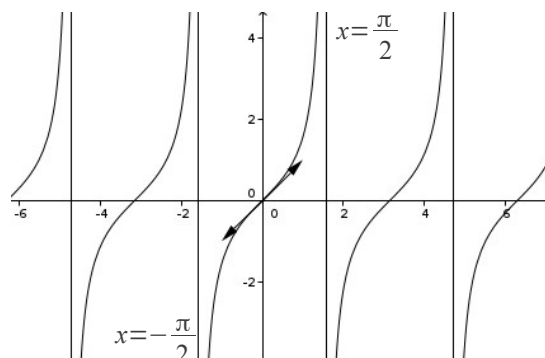
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0^+ \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan' x$	1	+
$\tan$	0	$+\infty$

Représentation graphique :

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$,

- On trace la courbe C qui représente la fonction tangente sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$,
- puis par symétrie par rapport à O , on obtient la courbe C sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$,
- et enfin on applique à C les translations de vecteurs $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$,



2) LA FONCTION ARC TANGENTE

Pour tout réel a , il existe un unique réel $b \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan b = a$.

Ce réel est appelé arc tangente de a et on le note $\arctan a$.

On peut ainsi définir une fonction, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par :

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\rightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

On dit que cette fonction est la fonction réciproque de la fonction tangente, restreinte à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Propriété :

$$\begin{cases} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

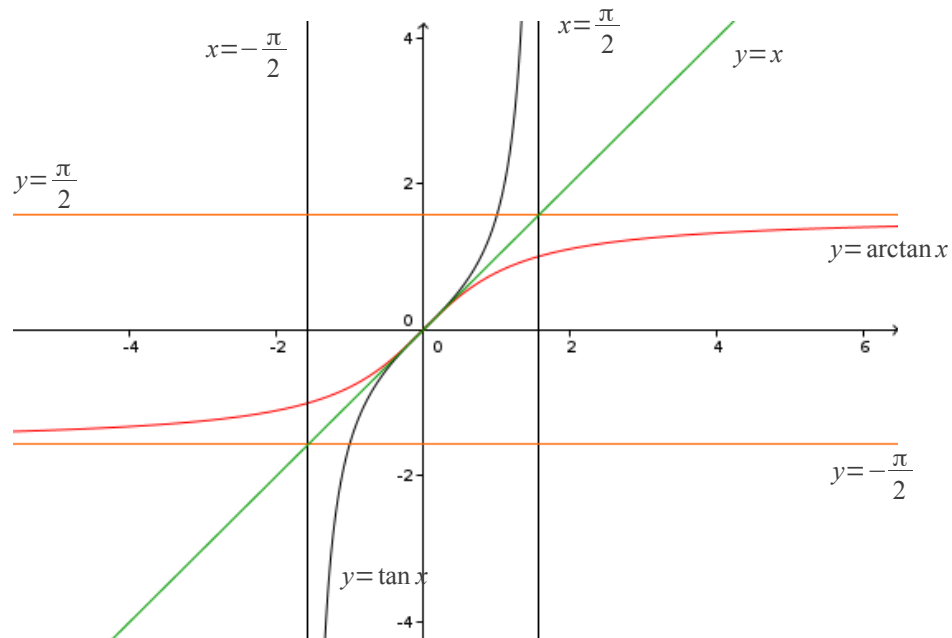
Remarque : la fonction $\arctan$ correspond à la fonction $\tan^{-1}$ de la calculatrice.

Nous admettrons un résultat déjà rencontré.

Les représentations graphiques d'une fonction et de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

On peut penser aux fonctions $\exp$ et $\ln$, la fonction carrée restreinte à $\mathbb{R}^+$ et la fonction racine carrée.

Par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$, les asymptotes verticales de la courbe représentative de la fonction $\tan$ se transforment en asymptotes horizontales, d'équations $y = -\frac{\pi}{2}$ et $y = \frac{\pi}{2}$, de la courbe représentative de la fonction $\arctan$.



On admet les conjectures graphiques suivantes :

- la fonction $\arctan$ est impaire
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

Propriété :

La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$