Équations différentielles du premier ordre

Exercice 1 :

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :
a) $y'-3y=0$
b) $y'+2y=0$
c) $2y'-y=0$

2) Soit l'équation différentielle (E_0) : $2y'+y=0$
a) Résoudre 1'équation (E_0).
b) Déterminer la solution de (E_0) vérifiant la condition initiale $y(0)=1$.

Exercice 2 :

Soit l'équation différentielle $(E): y'-y=x^2-x-1$
1) Résoudre l'équation différentielle (E_0): $y'-y=0$.
2) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=-x^2-x$ est une solution de l'équation différentielle (E).
3) Déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E).
4) Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0)=1$

Exercice 3 : ***Méthode de la variation de la constante***

On considère l'équation différentielle $(E): y'+y=\dfrac{1}{1+e^x}$

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y'+y=0$
2) Déterminer une fonction k, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=k(x)e^{-x}$ soit une solution de (E).
3) Déduire du 1) et du 2) l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4) Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0)=1+\ln 2$.

Exercice 4 :

1) Soit l'équation différentielle (E) : $y'+y=1-e^{-x}$
a) Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1-xe^{-x}$ est solution de (E).
b) Donner la solution générale de (E).
c) Déterminer la solution particulière g de (E) telle que $g(0)=0$.
2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-1;2]$ par: $g(x)=1-(x+1)e^{-x}$ et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.
a) Étudier les variations de g.
b) Tracer la courbe C.
c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I=\int_{-1}^{2}(x+1)e^{-x}\,dx$ En déduire l'aire A, en centimètres carrés, de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x=-1$ et $x=2$. Donner l'arrondi à 2 décimales de A.

Exercice 5 :

On considère l'équation différentielle :
(E): $y'-3y=\sin x$
1) Résoudre l'équation sans second membre associé :
(E_0) : $y'-3y=0$
2) Déterminer des réels a et b de sorte que la fonction p définie par : $p(x)=a\cos x+b\sin x$ soit solution de (E)

3) En déduire les solutions de (E).

Exercice 6 : ***Taux d'alcoolémie***
Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en gL^{-1}) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur $\mathbb{R}^+$, l'équation différentielle :
$(E): y'+y=ae^{-t}$ où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.
1) On pose, pour tout $t\in\mathbb{R}^+$: $g(t)=f(t)e^t$
Démontrer que g est une fonction affine.
2) Exprimer $f(t)$ en fonction de t et de a.
3) Dans cette question, on suppose que $a=5$.
a)Étudier les variations de f et tracer sa courbe.
Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.
b) Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à 0,5 gL^{-1}.

Exercice 7 : ***Interprétation de Xcas***
Interpréter chacune des lignes ci_dessous :

```
deSolve(4y'-7y=0,y)
```
$$c\_0 \cdot \exp\left(\frac{7\cdot x}{4}\right)$$
```
deSolve(4y'-7y=sin(x),y)
```
$$\frac{-4\cdot\cos(x)-7\cdot\sin(x)+65\cdot c\_0\cdot\exp\left(\frac{7\cdot x}{4}\right)}{65}$$
```
deSolve([4y'-7y=0,y(0)=1],y)
```
$$\exp\left(\frac{7\cdot x}{4}\right)$$

Équations différentielles du second ordre

Exercice 8 :
Résoudre les équations différentielles suivantes :
a) $y''+3y'+2y=0$
b) $y''-4y'+4y=0$
c) $y''-4y'+13y=0$.

Exercice 9 :
On considère l'équation différentielle (E): $y''-4y'+3y=4$
1) Résoudre l'équation différentielle (E_0): $y''-4y'+3y=0$.
2) Déterminer une fonction constante g solution de l'équation (E).
3) Déduire du 1) et du 2) la solution générale de (E).
4) Déterminer la solution particulière f de (E) vérifiant les deux conditions initiales: $f(0)=1$ et $f'(0)=2$.

Exercice 10 :
On considère l'équation différentielle (E): $y''+2y'+y=x$

1) Donner la solution générale de l'équation différentielle (E_0): $y''+2y'+y=0$.
2) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x-2$ est une solution de (E).
3) Déduire du 1) et du 2) l'ensemble des solutions de (E).
4) Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative passe par l'origine du repère et admet, en ce point, l'axe des abscisses pour tangente.

Exercice 11 :
On considère l'équation différentielle (E): $x''-2x'-3x=3t^2+1$
(x est une fonction de la variable t)

1) Résoudre l'équation (E_0) : $x''-2x'-3x=0$.
2) Chercher une solution particulière de l'équation (E) sous la forme d'une fonction polynôme du second degré.
3) En déduire la solution générale de (E).
4) Déterminer la fonction f, solution de (E) telle que: $f(0)=0$ et $f'(0)=0$.

Équations différentielles – feuille 2

Exercice 12 :

Soit (E) l'équation différentielle: $x'' + 9x = 2\cos(\omega t)$

(x est une fonction de la variable t)

1) Résoudre l'équation (E_0): $x'' + 9x = 0$.

2) Résoudre l'équation (E) dans le cas où $\omega \neq 3$. On cherchera une solution particulière x_1 telle que :

$x_1(t) = A\cos(\omega t)$ où A sera exprimé en fonction de la constante ω

3) Résoudre l'équation (E) dans le cas particulier où $\omega = 3$.

On cherchera une solution particulière x_2 telle que:

$x_2(t) = t(B\cos(3t) + C\sin(3t))$. B et C étant deux nombres réels à déterminer.

Exercice 13 :

Soit l'équation différentielle: (E) : $y'' + 4y' + 3y = e^{-2x}$.

1) Résoudre l'équation : $y'' + 4y' + 3y = 0$.

2) Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $A e^{-2x}$, où A est un nombre réel que l'on déterminera.

3) En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

4) Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 14 : ***Interprétation de Xcas***

Interpréter chacune des lignes ci_dessous :

```
simplify((deSolve(y''+4y'+3y=0,y)))
```

$$\frac{c\_0 * \exp(x)^2 + c\_1}{\exp(x)^3}$$

```
simplify(deSolve(y''+4y'+3y=e^(-2*x),y))
```

$$\frac{c\_0 * \exp(x)^2 + c\_1 - \exp(x)}{\exp(x)^3}$$

```
simplify(deSolve([y''+4y'+3y=e^(-2*x),y(0)=0,y'(0)=0],y))
```

$$\frac{\exp(x)^2 - 2 * \exp(x) + 1}{2 * \exp(x)^3}$$

Exercice 15 :

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$

1) Résoudre l'équation différentielle (E_0): $y'' + 2y' + y = 0$.

2) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^2 e^{-x}$ est une solution (E) .

3) En déduire la solution générale de (E) .

4) Déterminer la solution f de (E) qui vérifie : $f(0) = 4$ et $f'(0) = 1$

Exercice 16 :

Soit l'équation différentielle (E): $y'' - 3y' + 2y = 8x^2 - 24x$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E_0): $y'' - 3y' + 2y = 0$.

2) Déterminer les nombres réels a , b , c pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation (E) .

3) Déduire du 1) et du 2) l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .

4) Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 17 :

A) Résolution d'une équation différentielle

On veut résoudre l'équation différentielle

(E): $y'' + 2y' - 3y = -9x + 9$

1) Résoudre l'équation différentielle (E_0): $y'' + 2y' - 3y = 0$.

2) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction g définie sur I $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit une solution particulière de (E) .

3) Déterminer la solution particulière h de (E) telle que $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$.

B) Étude des variations et calcul d'aire

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x} + 3x - 1$.

1) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

2) Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ $f'(x) = -3e^{-3x} + 3$. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f . En déduire le signe de $f(x)$.

3) Soit C la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm. Tracer la courbe C .

4) Montrer que $\int_0^3 e^{-3x}\,dx = \frac{-1}{3}e^{-9} + \frac{1}{3}$.

5) En déduire, l'aire en cm , de la partie du plan comprise entre C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 3$.

Correction :

ex 1 :

1° a) $k\,e^{3x}$ b) $k\,e^{-2x}$ c) $k\,e^{x/2}$ 2° a) $x = k\,e^{-x/2}$. b) $x(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1$.

ex 2 :

$\boxed{3}$ 1° $\dfrac{b(x)}{a(x)} = 1$ Primitive : $G(x) = x$. Solutions : $k\,e^{-x}$ 2° $g(x) = -x^2 - x$, $g'(x) = -2x - 1$. $g'(x) - g(x) =$ $-2x - 1 + x^2 + x = x^2 - x - 1$ donc g solution. $f(x) =$ 3° $-x^2 - x + k\,e^{-x}$ 4° $f(0) = 1 \Leftrightarrow 3 + k = 1 \Leftrightarrow k = -2$.

ex 3 :

$\boxed{5}$ 1° Solutions : $k\,e^{-x}$ 2° $h(x) = k(x)\,e^{-x}$: $h'(x) = k'(x)\,e^{-x} - k(x)\,e^{-x}$. $h'(x) + h(x) = \dfrac{1}{1+e^x} \Leftrightarrow$

$k'(x)\,e^{-x} - k(x)\,e^{-x} + k(x)\,e^{-x} = \dfrac{1}{1+e^x} \Leftrightarrow k'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow k(x) = \ln(1+e^x) + c$. 3° $f(x) = \ln(1+e^x) + k\,e^{-x}$.

4° $f(0) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+1) + k = 1 + \ln 2 \Leftrightarrow k = 1$. $f(x) = \ln(1+e^x) + e^{-x}$.

ex 4 :

$\boxed{4}$ 1° $f(x) = 1 - x\,e^{-x}$; $f'(x) = -e^{-x} + x\,e^{-x}$. $f'(x) + f(x) = -e^{-x} + x\,e^{-x} + 1 - x\,e^{-x} = 1 - e^{-x}$.

b) $g(x) = 1 - x\,e^{-x} + k\,e^{-x}$ c) $g(0) = 0 \Leftrightarrow 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = -1$. $g(x) = 1 - x\,e^{-x} - e^{-x} = 1 - (x+1)\,e^{-x}$.

2° a) $g'(x) = -e^{-x} + (x+1)\,e^{-x} = x\,e^{-x}$. $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. c) $I = 3 - e + 4\,e^{-2}$ d) $4\,I \approx 3{,}29$