LOI BINOMIALE

1) EXPÉRIENCES IDENTIQUES ET INDÉPENDANTES

Définition :

On considère n (où $n \in \mathbb{N}^*$) expériences aléatoires **identiques** successives . Si les résultats de chacune d'elles ne dépendent pas des résultats des expériences précédentes, on dit que ces expériences sont **indépendantes**.

Remarque :

Propriété :

Lors de la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est

2) SCHÉMA DE BERNOULLI

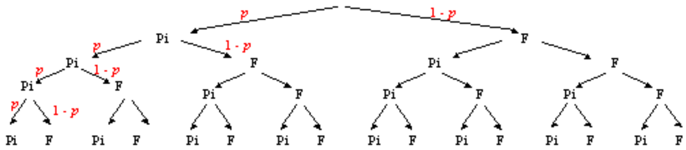
Définition :

On appelle **épreuve de Bernoulli** une épreuve ayant deux éventualités :
l'éventualité S avec la probabilité p et l'éventualité $\overline{S}$ avec la probabilité

L'éventualité S correspondra souvent au "succès" d'une expérience, $\overline{S}$ étant alors "l'échec".

Exemple :

On jette une pièce de monnaie.
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, les deux éventualités sont Pi : "Pile" et F : "Face".
Notons $P(Pi) = p$ et $P(F) = 1 - p$



(si la pièce est équilibrée, on a)

On répète quatre fois, de façon indépendante, le jet de cette pièce . On peut traduire la situation par un arbre pondéré.
L'univers de cette expérience aléatoire se compose de 16 quadruplets (un quadruplet est une liste de 4 éléments) de résultats correspondants chacun aux 16 chemins de l'arbre.

La probabilité d'obtenir le quadruplet $(Pi\ ;\ Pi\ ;\ F\ ;\ Pi)$ est

La probabilité d'obtenir trois fois Pile sur les quatre lancers est la probabilité de l'événement :

Le nombre 4 correspond au nombre de choix des positions des trois Pi dans la séquence de quatre (ou, ce qui est identique, au nombre de choix de la position du F dans la séquence de quatre), c'est-à-dire le nombre de chemins de l'arbre réalisant 3 succès pour 4 répétitions.
Notons X la variable aléatoire égale au nombre de "Pile" obtenus sur les quatre lancers.

En procédant de même, on en déduit la loi de probabilité de X :

k					
$P(X = k)$					

Définition :

On appelle **schéma (ou expérience) de Bernoulli**, la répétition n fois, de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

Remarque :
On dit que la variable aléatoire de l'exemple précédent suit une loi binomiale de paramètres

3) COEFFICIENTS BINOMIAUX

Dans l'exemple précédent, on a chaque fois déterminé le nombre de chemins de l'arbre réalisant k ($k \in \mathbb{N}$ et $k \leqslant 4$) succès pour 4 répétitions.
De façon plus générale,

Définition :

Le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès ($k \in \mathbb{N}$ et $k \leqslant n$) pour n répétitions est le nombre noté $\binom{n}{k}$.

On l'appelle **coefficient binomial** . $\binom{n}{k}$ Se lit “ k parmi n ”.

4) LOI BINOMIALE

Propriété :

On considère un schéma de Bernoulli consistant en la répétition n fois, de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès S est p.
Si on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus sur les n répétitions, la loi de probabilité de X est donnée par :
pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(X=k)=\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Définition :

On dit que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est une **loi binomiale de paramètres n et p** lorsque :

- l'ensemble de ses valeurs est
- pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

Propriété :

La loi binomiale de paramètres n et p a pour :

- espérance mathématique : $E(X)=np$
- variance : $V(X)=np(1-p)$
- écart type : $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

5) UTILISATION D'UNE CALCULATRICE ET D'UN ORDINATEUR

A) POUR DÉTERMINER DES COEFFICIENTS BINOMIAUX

Par exemple $\binom{3}{2}=$

Sur Texas instrument (82 stat, 83 & 84)	Écrire *n* (ici 3) puis entrer la fonction « Combinaison » (qui est dans le menu « Math/Prb ») puis l'argument *k* (ici 2). Si les instructions sont en anglais, la fonction sera « nCr » dans le même menu qu'indiqué.
Sur TI-NSpire	Dans une page calcul entrer « nCr(3,2).
Sur Casio	Écrire *n* (ici 3) puis entrer la fonction « nCr » (dans « OPTN » puis « PROB) puis l'argument *k* (ici 2).
Utilisation d'un tableur	Dans une cellule écrire « =COMBIN(3;2)».

B) POUR DÉTERMINER $P(X=k)$ POUR UNE LOI BINOMIALE DE PARAMÈTRES *n* ET *p*

Par exemple, pour $n=1000$, $p=0{,}5$ et $k=462$, on obtient $P(X=462) \approx$

Sur Texas instrument (82 stat, 83 & 84)	Entrer la fonction « binomFdp(n,p,k) » (qui est dans le menu « distrib ») avec les arguments $n=1000$, $p=0{,}5$ et $k=462$.
Sur TI-NSpire	Dans une page calcul entrer « binomPdf(1000,0.5,462) » (rappel : les points sont des virgules, les virgules des caractères de séparation des variables).
Sur Casio	Entrer la fonction « BinomialPD(*k,n,p*) » (dans « OPTN » puis « STAT » puis « DIST » puis « BINM » et « Bpd » pour finir) avec les arguments $n=1000$, $p=0{,}5$ et $k=462$.
Utilisation d'un tableur	Dans une cellule écrire « =LOI.BINOMIALE(valeur de *k ; n ; p* ;FAUX) ». Sur certains tableurs au lieu de « FAUX » il faut écrire 0.

C) POUR DÉTERMINER $P(X \leqslant k)$ POUR UNE LOI BINOMIALE DE PARAMÈTRES *n* ET *p*

Par exemple pour $n=1000$, $p=0{,}5$ et $k=462$, on obtient $P(X \leqslant 462) \approx$

Sur Texas instrument (82 stat, 83 & 84)	Entrer la fonction « binomFrép(*n,p,k*) » (qui est dans le menu « distrib »)avec les arguments $n=1000$, $p=0{,}5$ et $k=462$.
Sur TI-NSpire	Dans une page calcul entrer « binomCdf(1000,0.5,0,462) »
Sur Casio	Entrer la fonction « BinomialCD(k,n,p) » (dans « OPTN » puis « STAT » puis « DIST » puis « BINM » et « Bcd » pour finir) avec les arguments k = 462 la valeur à tester,*n* = 1000 et *p* = 0,5.
Utilisation d'un tableur	Dans une cellule écrire « =LOI.BINOMIALE(valeur de *k ; n ; p* ;VRAI) » que l'on tirera vers le bas. Sur certains tableurs au lieu de « FAUX » il faut écrire 1.

D) INTERPRÉTATION DE XCAS

```
binomial(4,2);
binomial(10,5,0.5);
binomial_cdf(20,0.4,12)

(6, 0.24609375, 0.9789710725 )
```

-
-
-