TESTS DE VALIDITÉ D'HYPOTHÈSE

1) PRINCIPE

Il s'agit à partir de l'étude d'un ou plusieurs échantillons de construire un test qui permettra de prendre une décision concernant la population mère. Bien entendu, ne connaissant pas l'ensemble de la population, on risque de se tromper en prenant cette décision.
Pour construire ce test, on formule une hypothèse concernant la population, appelée hypothèse nulle notée H_0 .
Le test doit permettre d'accepter cette hypothèse ou de la rejeter. Il y a alors quatre possibilités :

cas 1 : On accepte H_0 alors qu'elle est vraie
cas 2 : On rejette H_0 alors qu'elle est vraie
cas 3 : On accepte H_0 alors qu'elle est fausse
cas 4 : On rejette H_0 alors qu'elle est fausse

Dans le premier et le dernier cas, la conclusion est correcte, mais on commet une erreur dans les deux autres cas.

L'erreur qui consiste à rejeter H_0 alors qu'elle est vraie s'appelle l'**erreur de première espèce** et l'erreur qui consiste à accepter H_0 alors qu'elle est fausse s'appelle l'**erreur de deuxième espèce**.

Les probabilités d'aboutir à ces erreurs sont appelées **risque de première espèce noté α** et **risque de deuxième espèce noté β**.

Dans la pratique on ne considérera que le risque α, pour lequel on va se donner une limite supérieure, en général 5 %, 1 % ou 0,1 %. Cette limite est le niveau de signification du test qui permet de définir la condition de rejet de l'hypothèse nulle.

Le but du chapitre va être de préciser les probabilités de faire ces erreurs et d'en diminuer les risques.

2) TESTS RELATIFS A LA DISTRIBUTION NORMALE

A) TESTS RELATIF À UNE MOYENNE

La population totale est définie par son effectif N , sa moyenne m et son écart-type σ.
Un échantillon est défini par son effectif n , sa moyenne $\bar{x}$ et son écart-type σ'.

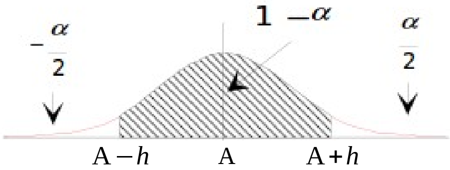
Test bilatéral

On veut tester si la moyenne m est égale à une valeur donnée A . On suppose que l'écart type σ est connu.
On formule une hypothèse concernant la moyenne m inconnue de la population ; c'est l'hypothèse nulle H_0 : $m=A$.
L'hypothèse alternative notée H_1 est : $m\neq A$.

Sous l'hypothèse H_0 (la moyenne de la population est égale à A) , le théorème de la limite centrée permet de dire que la distribution d'échantillonnage des moyennes X suit la loi normale $N\left(A,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.
Donc si nous fixons un seuil α , nous commençons par chercher h , tel que $P(A-h\leqslant X\leqslant A+h)=1-\alpha$

Or $P(A-h\leqslant X\leqslant A+h)=2P(X\leqslant A+h)-1$ (interprétation graphique)

On obtient $P(A-h\leqslant X\leqslant A+h)=1-\alpha\Leftrightarrow 2P(X\leqslant A+h)-1=1-\alpha\Leftrightarrow P(X\leqslant A+h)\leqslant 1-\frac{\alpha}{2}$



Exemple :

Déterminer h tel que, $P(A-h\leqslant X\leqslant A+h)=1-0{,}02$ où X suit la loi normale $N\left(1000;\frac{1}{10}\right)$

$P(A-h\leqslant X\leqslant A+h)=1-0{,}2\Leftrightarrow P(X\leqslant 1000+h)=0{,}99$

Avec Xcas :	Avec TI-82 plus
`normal_icdf(1000,1/10,0.99)` 1000.23263479	Dans le menu « distrib », choix 3 (Fracnormale). Écrire : Fracnormale(0.99,1000,1/10) puis valider.

On obtient $1000+h\approx 1000{,}2326$
On en déduit $h\approx 0{,}2326$

Pour $\alpha=0{,}05$, on obtient $h\approx 0{,}196$ (on retrouve $1{,}96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$)
Pour $\alpha=0{,}01$, on obtient $h\approx 0{,}258$ (on retrouve $2{,}58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$)

Remarque :

Avant de prélever un échantillon de taille n :

Il y a 95 % (cas où $\alpha=0,05$) de chances que sa moyenne soit dans l'intervalle $\left[A-1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}};A+1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

Il y a 99 % (cas où $\alpha=0,01$) de chances que sa moyenne soit dans l'intervalle $\left[A-2,58\frac{\sigma}{\sqrt{n}};A+2,58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

Nous prélevons alors un échantillon .
Si la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon est à **l'extérieur de l'intervalle**, nous conclurons que cet événement ne peut se réaliser qu'avec une probabilité de α si l'hypothèse est exacte.
Nous sommes enclins à affirmer que l'hypothèse est fausse au seuil α (ou niveau de signification α) , avec un risque d'erreur de première espèce. L'ensemble des résultats situés à l'extérieur du domaine constitue **la zone critique**.
Par contre, si la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon est à **l'intérieur de l'intervalle**, nous conclurons que l'événement peut se réaliser avec une probabilité de 1- α, si l'hypothèse est exacte. Nous pouvons alors affirmer que l'hypothèse est vraie au seuil α, avec un risque d'erreur de deuxième espèce.

D'où l'énoncé d'une règle de décision au seuil α.
Si la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon est dans l'intervalle, on accepte l'hypothèse.
Si la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon est hors de l'intervalle, on refuse l'hypothèse.

Test unilatéral

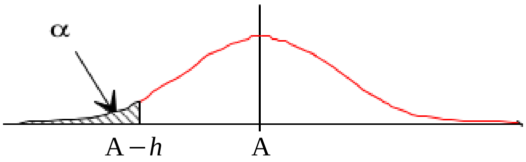
On veut tester si la moyenne m est différente d'une valeur donnée A.
On va encore considérer l'hypothèse

H_0 :" $m=A$ " mais on va avoir deux types de tests :

Type 1 : Test unilatéral à gauche

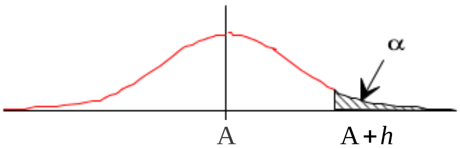
On pense que la moyenne est inférieure à A . L'hypothèse alternative est H_1 :" $m\leqslant A$ ".
Donc si nous fixons un seuil α , nous commençons par chercher h , tel que :

$P(A-h\leqslant X)=1-\alpha \quad \Leftrightarrow \quad P(X\leqslant A+h)=1-\alpha$ (interprétation graphique)



D'où l'énoncé d'une règle de décision au seuil α.
Si la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon est dans l'intervalle, on accepte l'hypothèse H_0 et nous affirmons que la moyenne n'est pas inférieure à A au seuil α.
Si la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon est hors de l'intervalle, on refuse l'hypothèse H_0 et l'on accepte l'hypothèse H_1 . Nous affirmons alors que la moyenne est inférieure à A au seuil α.

Type 2 : Test unilatéral à droite



On pense que la moyenne est supérieure à A . L'hypothèse alternative est H_1 :" $m\geqslant A$ ".

Donc si nous fixons un seuil α , nous commençons par chercher h , tel que :

$P(X\leqslant A+h)=1-\alpha$

D'où l'énoncé d'une règle de décision au seuil α.
Si la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon est dans l'intervalle, on accepte l'hypothèse H_0 et nous affirmons que la moyenne n'est pas supérieure à A au seuil α.
Si la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon est hors de l'intervalle, on refuse l'hypothèse H_0 et l'on accepte l'hypothèse H_1 . Nous affirmons alors que la moyenne est supérieure à A au seuil α.

B) TESTS RELATIF À UNE PROPORTION

Les tests précédents s'appliquent aussi à la proportion p du caractère d'une population dont on cherche à savoir si elle est égale ou non à A
On émet alors deux hypothèses :
- l'hypothèse nulle H_0 :" $p=\mathrm{A}$ "
- l'hypothèse alternative H_1 :" $p\neq a$ " (test bilatéral) ou " $p\geqslant \mathrm{A}$ " ou " $p\leqslant \mathrm{A}$ " (test unilatéral)

Sous l'hypothèse H_0 , la variable aléatoire X qui à chaque échantillon de taille n associe l'effectif s du caractère étudié suit alors la loi loi binomiale $\mathrm{B}(n;\mathrm{A})$.

On fixe un seuil α et on détermine le réel h tel que $\mathrm{P}(nA-h\leqslant \mathrm{X}\leqslant nA+h)=1-\alpha$ (dans le cas de H_1 :" $p\neq a$ ")
On applique alors les règles de décision précédentes suivant que l'effectif s appartient ou non à l'intervalle $[nA-h;nA+h]$.
Quand les conditions sont réunis pour que la loi binomiale soit approximable par une loi normale ($n\geqslant 30$, $np\geqslant 5$ et $n(1-p)\geqslant 5$) sous l'hypothèse H_0 , les fréquences d'échantillon de taille n suivent la loi normale $\mathrm{N}\left(\mathrm{A};\sqrt{\dfrac{\mathrm{A}(1-\mathrm{A})}{n}}\right)$

On fixe alors un seuil α et on applique les règles de décision précédentes sur la fréquence f d'un échantillon prélevé au hasard dans la population.

3) COMPARAISON DE DEUX ÉCHANTILLONS

On dispose de deux échantillons A et B, caractérisés par :

Leurs effectifs respectifs n_A et n_B ; leurs moyennes respectives $\overline{\mathrm{x}}_\mathrm{A}$ et $\overline{\mathrm{x}}_\mathrm{B}$; leurs écart-types respectif $\sigma_\mathrm{A}{}'$ et $\sigma_\mathrm{B}{}'$.

On ignore s'ils sont tirés de la même population.
On va estimer l'écart-type de la population P_A associée à A par $\sigma_\mathrm{A}=\sqrt{\dfrac{n_\mathrm{A}}{n_\mathrm{A}-1}}\sigma_\mathrm{A}{}'$ et l'écart-type de la population P_B associée à B par $\sigma_\mathrm{B}=\sqrt{\dfrac{n_\mathrm{B}}{n_\mathrm{B}-1}}\sigma_\mathrm{B}{}'$.

On va se placer dans le cas où les variables aléatoires $\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{A}$ et $\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{B}$ associées aux distributions d'échantillonnage des population P_A et P_B suivent les lois normales $\mathrm{N}\left(\mathrm{M}_\mathrm{A};\dfrac{\sigma_\mathrm{A}}{\sqrt{n_\mathrm{A}}}\right)$ et $\mathrm{N}\left(\mathrm{M}_\mathrm{B};\dfrac{\sigma_\mathrm{B}}{\sqrt{n_\mathrm{B}}}\right)$.

On considère alors la variable aléatoire $\mathrm{D}=\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{B}-\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{A}$.
On suppose que $\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{A}$ et $\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{B}$ sont indépendantes, alors $\mathrm{D}=\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{B}-\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{A}$ suit une loi normale et :

$$\mathrm{E}(\mathrm{D})=\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{B}-\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{A})=\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{B})-\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{A})=\overline{x}_\mathrm{B}-\overline{x}_\mathrm{A}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{D})=\mathrm{V}(\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{B}-\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{A})=\mathrm{V}(\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{B})+\mathrm{V}(\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{A})=\frac{\sigma_\mathrm{B}{}^2}{\mathrm{M}_\mathrm{B}}+\frac{\sigma_\mathrm{A}{}^2}{\mathrm{M}_\mathrm{A}}$$

Donc $\sigma(\mathrm{D})=\sqrt{\dfrac{\sigma_\mathrm{B}{}^2}{\mathrm{M}_\mathrm{B}}+\dfrac{\sigma_\mathrm{A}{}^2}{\mathrm{M}_\mathrm{A}}}$

Construction du test: H_0 : $m_\mathrm{A}=m_\mathrm{B}$ et H_1 : $m_\mathrm{A}\neq m_\mathrm{B}$ (ou $m_\mathrm{A}\geqslant m_\mathrm{B}$ ou $m_\mathrm{A}\leqslant m_\mathrm{B}$)

Sous l'hypothèse H_0 , D suit la loi normale $\mathrm{N}(0;\sigma_\mathrm{D})$

On fixe un seuil α et on détermine h tel que $\mathrm{P}(-h\leqslant \mathrm{D}\leqslant h)=\alpha$ (dans le cas où H_1 : $m_\mathrm{A}\neq m_\mathrm{B}$)
La règle de décision est la même que précédemment suivant que $\overline{\mathrm{D}}=\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{A}-\overline{\mathrm{X}}_\mathrm{A}$ appartient à l'intervalle $[-h;h]$ ou pas.