<u>Ex 1 :</u> Test bilatéral relatif à une moyenne

Une machine fabrique des barres en grande série. On veut vérifier le réglage de la machine.
On appelle L la variable aléatoire qui prend pour valeur la longueur d'une barre.
On admet que L suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type 1.
Dans le cas où la machine est bien réglée, la moyenne μ est égale à 1000.
On appelle $\overline{L}$ la variable aléatoire qui prend pour valeur la moyenne des longueurs des 100 barres d'un échantillon aléatoire.

1) On construit un test d'hypothèse bilatéral permettant de vérifier le bon réglage de la machine au seuil de 2 %.

a) Donner l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1 .

b) Sous l'hypothèse H_0 , quelle est la loi de $\overline{L}$?

c) Déterminer la région critique et énoncer la règle de décision relative à ce test.

2) On a regroupé par classes les longueurs des barres d'un échantillon :

Longueur	[997;999[	[999;1001[	[1001;1003[
Quantité	14	75	11

a) Déterminer une valeur approchée de la moyenne $\overline{l}$ de la longueur des barres prélevées, en supposant que dans chaque classe tous les éléments sont situés au centre.

b) Au vu de cette échantillon, que peut-on en conclure quant au réglage de la machine ?

<u>Ex 2 :</u> Test bilatéral relatif à une moyenne

On fabrique des pièces en série. Soit X la variable aléatoire qui, à toute pièce prise au hasard dans la production, associe sa cote exprimée en mm. On sait que X suit une loi normale d'écart type σ =2,4 mm, mais on a des doutes sur l'espérance mathématique μ de X .
Afin de vérifier l'espérance mathématique de X , on prélève un échantillon de 50 pièces. On assimile tout échantillon de 50 pièces à un échantillon aléatoire non exhaustif.
Le tableau suivant donne la distribution des mesures des cotes arrondies à l'entier le plus proche :

Cotes	147	148	149	150	151	152	153	154
Effectifs	2	3	5	10	9	9	8	4

1) Calculer la moyenne $\overline{x}$ de cet échantillon . On ne calculera pas son écart type.

2) On suppose que la variable aléatoire X qui à tout échantillon de 50 pièces prélevées au hasard associe la moyenne des cotes des pièces de cet échantillon suit la loi normale $N\left(\mu, \frac{2,4}{\sqrt{50}}\right)$.
On veut construire un test bilatéral pour permettre d'accepter ou de rejeter, au risque de 5 %, l'hypothèse selon laquelle l'espérance mathématique μ de X est 150 mm.
On prend comme hypothèse nulle $H_0 : \mu = 150$ et comme hypothèse alternative $H_1 : \mu \neq 150$.

a) Trouver un réel positif h tel que, sous l'hypothèse H_0 : $P(150 - h \leqslant X \leqslant 150 + h) = 0,95$.

b) Énoncer la règle de décision.

c) Utiliser ce test avec l'échantillon des 50 pièces proposé dans cet énoncé et conclure.

<u>Ex 3 :</u> Test bilatéral relatif à une proportion

Les statistiques ont permis d'établir qu'en période de compétition, la probabilité pour un sportif pris au hasard d'être déclaré positif au contrôle antidopage est égale à 0,02.
On décide de construire un test qui, à la suite des contrôles sur un échantillon de 50 sportifs prélevés au hasard, permette de décider si, au seuil de signification de 10 %, le pourcentage de sportifs contrôlés positif est $p=0,02$.

1) Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire (supposé non exhaustif) de 50 sportifs contrôlés, associe le pourcentage de sportifs contrôlés positivement . On suppose que F suit la loi normale $\mathrm{N}\left(p;\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ où $p=0,002$ et $n=50$.
Énoncer une hypothèse nulle H_0 et une hypothèse alternative H_1 pour ce test bilatéral.
Déterminer sous l'hypothèse H_0 , le réel positif a tel que $\mathrm{P}(p-a\leqslant\mathrm{F}\leqslant p+a)=0,9$
Énoncer la règle de décision du test.

2) Dans l'échantillon E deux contrôles antidopage ont été déclarés positifs. En appliquant la règle de décision du test à cet échantillon assimilé à un échantillon aléatoire non exhaustif, peut-on conclure au seuil de risque 10 % que l'échantillon observé est représentatif de l'ensemble de la population sportive ?

<u>Ex 4 :</u> Test unilatéral à gauche relatif à une proportion

Une machine fabrique des tiges en grande série . La production étant importante, on assimile tout prélèvement d'échantillon à un prélèvement avec remise.
La machine est supposée bien réglée quand la proportion de pièces acceptables est supérieure ou égale à 90 %.
Pour contrôler le réglage de la machine, on construit un test permettant de décider si, au seuil de 5 %, la machine est bien réglée et on prélève de temps en temps des échantillons aléatoires de 150 tiges.

1) Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon aléatoire de 150 tiges associe le pourcentage de tiges acceptables dans cet échantillon.
On choisit pour hypothèse nulle H_0 : $p=90$ % et pour hypothèse alternative H_1 : $p<90$ %.
Déterminer le nombre réel h tel que, sous l'hypothèse H_0 , $\mathrm{P}(\mathrm{F}>h)=0,95$.
Énoncer la règle de décision de ce test.

2) On prélève un échantillon aléatoire de 150 tiges. On trouve 22 tiges défectueuses.
Quel est le pourcentage de tiges acceptables de cet échantillon ?
En appliquant la règle de décision du test à cet échantillon non exhaustif, peut-on conclure , au seuil de 5 %, que la machine est bien réglée ?

<u>Ex 5 :</u> Test unilatéral à droite relatif à une proportion

Un magicien prétend qu'il peut souvent deviner à distance la couleur d'une carte tirée au hasard d'un jeu de cartes bien battu et comportant des cartes de deux couleurs différentes en nombre égal.
On appelle p la probabilité que le magicien donne une réponse juste (succès) lors d'un tirage.
Si le magicien est un imposteur , on a $p=\frac{1}{2}$, sinon $p>\frac{1}{2}$.
On appelle F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille 100, associe la fréquence des succès obtenus par le magicien au cours des n tirages d'une carte.
On construit un test unilatéral permettant de détecter, au risque de 5 %, si le magicien est un imposteur.
On choisit comme hypothèse nulle $\mathrm{H}_0:p=\frac{1}{2}$, et comme hypothèse alternative $\mathrm{H}_1:p>\frac{1}{2}$.

1) Calculer, sous l'hypothèse H_0 , le réel positif h tel que $\mathrm{P}\left(\mathrm{F}\leqslant\frac{1}{2}+h\right)=0,95$.

2) Énoncer la règle de décision du test.

3) Sur un échantillon de taille 100, le magicien a obtenu 64 succès . Peut-on considérer, au risque de 5 %, que le magicien est un imposteur ?