

SUITES ARITHMÉTIQUES et SUITES GÉOMÉTRIQUES

1) SUITES ARITHMÉTIQUES

A) DÉFINITION PAR RÉCURRENCE

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique**, s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé **raison** de la suite (u_n) .

r peut-être positif ou négatif.

Exemples :

- La suite des entiers naturels est une suite arithmétique de raison
- La suite des entiers naturels impairs est une suite arithmétique de raison
- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 4n + 4$. (u_n) est-elle une suite arithmétique ?

L'astuce :

calculer $u_{n+1} - u_n$

Plus généralement, on montre de la même façon, que toute suite (u_n) définie par $u_n = an + b$ (où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) est une suite arithmétique de raison a et de premier terme b .

B) DÉFINITION PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .
Alors, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 + nr$

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique définie par $u_0 = 7$ et $r = 12$, alors $u_6 =$

Plus généralement :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .
Pour tous entiers naturels p et q , on a : $u_p = u_q + (p - q)r$

Intérêts :

- Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite arithmétique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)
- Cette formule permet aussi de calculer la raison d'une suite arithmétique dont on connaît deux termes.

Exemples :

- Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 4$ et $u_4 = 10$. Calculer la raison r .
- Soit (u_n) une suite arithmétique définie par $u_{10} = 30$ et $r = 2$. Calculer u_{20} .

C) SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Remarque préliminaire : NOMBRE DE TERMES D'UNE SOMME

$u_1 + u_2$ est une somme de deux termes ; $u_1 + u_2 + u_3$ est une somme de trois termes

De manière générale, $u_1 + u_2 + \dots + u_p$ est une somme de p termes.

Comment faire (sans compter sur les doigts) pour calculer le nombre de termes de la somme $u_{12} + u_{13} + \dots + u_{56}$?

Plus généralement :

Le nombre de termes de la somme $u_p + u_{p+1} + \dots + u_q$ (p, q entiers naturels tels que $p \leq q$) est $q - p + 1$

Propriété :

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au **produit du nombre de termes par la demi-somme des termes extrêmes**.

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exemple :

Soit (v_n) la suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $v_0=15$. Calculer $v_0 + v_1 + \dots + v_8$.

2) SUITES GÉOMÉTRIQUES

A) DÉFINITION PAR RÉCURRENCE

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique**, s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1} = qu_n$.
Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n) .

q peut-être positif ou négatif et non nul (sans intérêt)

Exemples :

- Soit (u_n) , la suite des puissances de 2, définie par $u_n = 2^n$. (u_n) est-elle une suite géométrique ?
- Soit (v_n) la suite définie par $v_n = n \times 5^n$. (v_n) est-elle une suite géométrique ?
- Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par $w_n = 4 \times 3^n$. (w_n) est-elle une suite géométrique ?

Plus généralement, on montre de la même façon, que toute suite (u_n) définie par $u_n = aq^n$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}^*$) est une suite géométrique de raison q et de premier terme a .

B) DÉFINITION PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .
Alors, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 q^n$

Exemple : Soit u_n la suite géométrique définie par $u_0 = 7$ et $r = 12$, alors $u_3 =$

Plus généralement :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q . Pour tout entier naturel m et n , on a $u_m = u_n \times q^{m-n}$

Intérêt : Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite géométrique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)

Exemples :

- Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_{10} = 30$ et $q = 2$. Calculer u_{13} .
- Soit (v_n) une suite géométrique telle que $v_2 = 5$ et $v_8 = 320$. Déterminer la raison q .

Attention : Cette formule ne permet pas de calculer la raison d'une suite géométrique dont on connaît deux termes .

C) SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Propriété :

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q , on applique la formule suivante :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Exemple :

Soit (v_n) la suite géométrique définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 2^n$. Simplifier $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$