SUITES ARITHMÉTIQUES et SUITES GÉOMÉTRIQUES

1) SUITES ARITHMÉTIQUES

A) DÉFINITION PAR RÉCURRENCE

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique** , s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé **raison** de la suite (u_n) .

***r* peut-être positif ou négatif** .

Exemples :

- La suite des entiers naturels est une suite arithmétique de raison 1 .
- La suite des entiers naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2 .
- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 4n + 4$. (u_n) est-elle une suite arithmétique ?

L'astuce : calculer $u_{n+1} - u_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 4 - (4n - 4) = 4$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n + 4$ et (u_n) est une suite arithmétique de raison 4 .

Plus généralement, on montre de la même façon, que toute suite (u_n) définie par $u_n = an + b$ (où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) est une suite arithmétique de raison a et de premier terme b .

B) DÉFINITION PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .
Alors, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 + nr$

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique définie par $u_0 = 7$ et $r = 12$, alors $u_6 = 7 + 6 \times 12 = 79$ ...

Plus généralement :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .
Pour tous entiers naturels p et q , on a : $u_p = u_q + (p - q) r$

Intérêts :

- Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite arithmétique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)
- Cette formule permet aussi de calculer la raison d'une suite arithmétique dont on connaît deux termes.

Exemples :

- Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 4$ et $u_4 = 10$. Calculer la raison r.
  On a $u_4 = u_2 + (4 - 2) r$, donc $r = ... = 3$

- Soit (u_n) une suite arithmétique définie par $u_{10} = 30$ et $r = 2$. Calculer u_{20} .
  On a $u_{20} = u_{10} + (20 - 10) 2 = 50$

C) SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Remarque préliminaire : NOMBRE DE TERMES D'UNE SOMME

$u_1 + u_2$ est une somme de deux termes ; $u_1 + u_2 + u_3$ est une somme de trois termes
De manière générale, $u_1 + u_2 + ... + u_p$ est une somme de p termes .

Comment faire (*sans compter sur les doigts*) pour calculer le nombre de termes de la somme $u_{12} + u_{13} + ... + u_{56}$?
On peut écrire $u_{12} + u_{13} + ... + u_{56} = u_{1+11} + u_{2+11} + ... + u_{45+11}$
La somme a donc 45 termes, c'est à dire 56 – 12 + 1

Plus généralement :

Le nombre de termes de la somme $u_p + u_{p+1} + ... + u_q$ (p , q entiers naturels tels que $p \leqslant q$) est $\boldsymbol{q - p + 1}$

Propriété :

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au **produit du nombre de termes** par **la demi-somme des termes extrêmes** .

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exemple :
Soit (v_n) la suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $v_0=15$. Calculer $v_0+v_1+...+v_8$.
On a $v_8=v_0+4\times 8=15+32=47$
On en déduit que $v_0+v_1+...+v_8=9\times\dfrac{v_0+v_8}{2}=9\times\dfrac{15+47}{2}=279$

2) SUITES GÉOMÉTRIQUES

A) DÉFINITION PAR RÉCURRENCE

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique** , s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1}=qu_n$.
Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n).

***q* peut-être positif ou négatif** *et non nul (sans intérêt)*

Exemples :

- Soit (u_n) , la suite des puissances de 2 , définie par $u_n=2^n$. (u_n) est-elle une suite géométrique ?

  Pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1}=2^{n+1}=2\times 2^n=2\,u_n$
  Cette suite est donc une suite géométrique de raison 2 .

- Soit (v_n) la suite définie par $v_n=n\times 5^n$. (v_n) est-elle une suite géométrique ?

  Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=5\times\dfrac{n+1}{n}$, ce qui n'est pas un rapport constant.
  La suite (v_n) n'est donc pas une suite géométrique.

- Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par $w_n=4\times 3^n$. (w_n) est-elle une suite géométrique ?

  Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $w_{n+1}=4\times 3^{n+1}=3\times(4\times 3^n)=3\times w_n$
  Cette suite est donc une suite géométrique de raison 3.

Plus généralement, on montre de la même façon, que toute suite (u_n) définie par $u_n=aq^n$ (où $a\in\mathbb{R}^*$ et $q\in\mathbb{R}^*$) est une suite géométrique de raison q et de premier terme a.

B) DÉFINITION PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Alors, pour tout entier naturel n , on a : $u_n=u_0\,q^n$

Exemple : Soit u_n la suite géométrique définie par $u_0=7$ et $r=12$, alors $u_3=7\times 12^3=12096$

Plus généralement :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q . Pour tout entier naturel m et n , on a $u_m=u_n\times q^{m-n}$

Intérêt : Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite géométrique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)

Exemples :

- Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_{10}=30$ et $q=2$. Calculer u_{13}.
  On a $u_{13}=u_{10}\times 2^{13-10}=30\times 2^3=30\times 8=240$

- Soit (v_n) une suite géométrique telle que $v_2=5$ et $v_8=320$. Déterminer la raison q.
  On a $v_8=v_2\times q^{8-2}$, donc $320=5\times q^6$ c'est à dire $q^6=64$
  Il y a donc deux valeurs possibles $q=2$ **ou** $q=-2$

Attention : Cette formule ne permet pas de calculer la raison d'une suite géométrique dont on connaît deux termes .

C) SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Propriété :

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q , on applique la formule suivante :

$$\mathbf{S = premier\ terme} \times \frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{q}^{\text{nombre de termes}}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{q}}$$

Exemple :
Soit (v_n) la suite géométrique définie , pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $v_n=2^n$. Simplifier $1+2+2^2+...+2^n$

On a $1+2+2^2+...+2^n=1\,\dfrac{(1-2^{n+1})}{1-2}=2^{(n+1)}-1$