1ère **Pique-nique n ° 4**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
1) 8 pts **2)** 8 pts **3)** 4 pts	

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .* ***Répondre sur cette feuille***.

Ex 1 : On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{2}{1+u_n} \end{cases}$ et la suite (v_n) définie par $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$

1) a) Avec un tableur, on a obtenu le résultat suivant :

Quelles formules ont été saisies dans les cellules B3 et C2 puis tirées vers le bas :

	A	B	C
1	n	un	vn
2	0	3	0,4
3	1	0,5	-0,2
4	2	1,33333	0,1
5	3	0,85714	-0,05
6	4	1,07692	0,025
7	5	0,96296	-0,0125
8	6	1,01887	0,00625
9	7	0,99065	-0,0031
10	8	1,00469	0,00156

En B3 :

En C2 :

b) Conjecturer la nature de la suite (v_n) .

2) a) Compléter le calcul suivant :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\square}{\dfrac{u_n-1}{u_n+2}}=\square\times\frac{u_n+2}{u_n-1}=\frac{\dfrac{2}{1+u_n}-1}{\square}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}=\frac{\square}{\square}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}=\frac{\dfrac{1-u_n}{1+u_n}}{\square}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}$$

Ce qui donne :

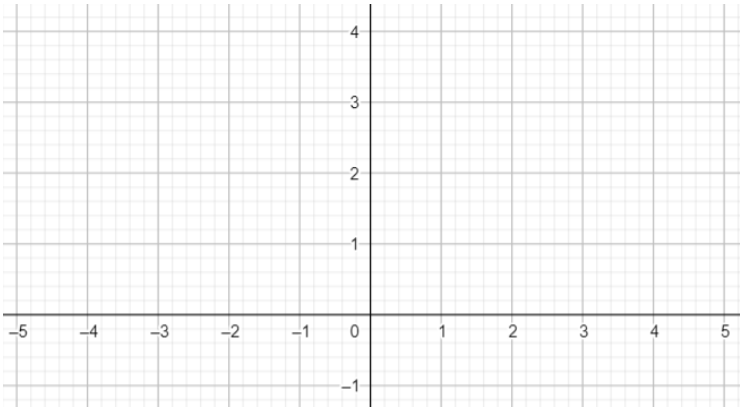
$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1-u_n}{\square}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}=\frac{\square}{\square}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}=\square$$

b) En déduire la nature de (v_n) , puis une expression de v_n en fonction de n .

c) En utilisant $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$, exprimer u_n en fonction de v_n . Commencer en utilisant le produit en croix …

d) En déduire une expression de la forme explicite de (u_n) .

Ex 2 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=-5 \\ u_{n+1}=\frac{-1}{3}u_n+2 \end{cases}$.



1) Représenter graphiquement la suite (u_n), puis conjecturer la limite de (u_n).

2) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=u_n-\frac{3}{2}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

c) Justifier la limite de (u_n) conjecturée à la question 1).

3)

a) Compléter le programme ci-dessous écrit en Python, afin de déterminer le premier indice n tel que $\left|u_n-\frac{3}{2}\right|<0,001$.

```
n=
U=
while abs(U-3/2)      :
    n=
    U=
print(n)
```

b) Donner la valeur retournée par le programme.

Ex 3 : Pour calculer la somme T=5+25+125+...+244140625 , on utilise le programme incomplet écrit en Python ci-dessous :

1) Compléter ce programme.

```
T=
U=
while                    :
    T=
    U=U*5
print(T)
```

2) Par la méthode de votre choix (formule du cours, tableur, programme…) , déterminer ce qu'affiche ce programme. Seul le résultat est demandé.

Correction :

Ex 1 :

1) On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{2}{1+u_n} \end{cases}$ et la suite (v_n) définie par $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$

a) Avec un tableur, on a obtenu le résultat suivant :

	A	B	C
1	n	un	vn
2	0	3	0,4
3	1	0,5	-0,2
4	2	1,33333	0,1
5	3	0,85714	-0,05
6	4	1,07692	0,025
7	5	0,96296	-0,0125
8	6	1,01887	0,00625
9	7	0,99065	-0,0031
10	8	1,00469	0,00156

Quelles formules ont été saisies dans les cellules B3 et C2 puis tirées vers le bas :

En B3 : =2/(1+B2)

En C2 : =(B2-1)/(B2+2)

b) Conjecturer la nature de la suite (v_n) .

(v_n) semble être une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$

2) a) Compléter le calcul suivant :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}}{\dfrac{u_n-1}{u_n+2}}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}=\frac{\dfrac{2}{1+u_n}-1}{\dfrac{2}{1+u_n}+2}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}=\frac{\dfrac{2-1-u_n}{1+u_n}}{\dfrac{2+2+2u_n}{1+u_n}}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}=\frac{\dfrac{1-u_n}{1+u_n}}{\dfrac{4+2u_n}{1+u_n}}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}$$

Ce qui donne :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1-u_n}{4+2u_n}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}=\frac{-(u_n-1)}{2(2+u_n)}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}=-\frac{1}{2}$$

b) En déduire la nature de (v_n) , puis une expression de v_n en fonction de n .

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et premier terme $v_0=\dfrac{u_0-1}{u_0+2}=\dfrac{2}{5}$

Ainsi pour tout entier naturel n , on a $v_n=\dfrac{2}{5}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

c) En utilisant $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$, exprimer u_n en fonction de v_n . Commencer en utilisant le produit en croix …

$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2} \Leftrightarrow v_n(u_n+2)=u_n-1 \Leftrightarrow v_nu_n+2v_n=u_n-1 \Leftrightarrow v_nu_n-u_n=-1-2v_n \Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-1-2v_n \Leftrightarrow u_n=\frac{-1-2v_n}{v_n-1}$$

Ce qui donne $u_n=\dfrac{1+2v_n}{1-v_n}$

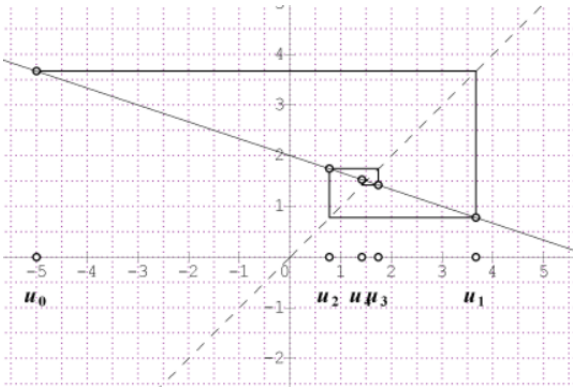
d) En déduire une expression de la forme explicite de (u_n) .

Ainsi pour tout entier naturel n , on a : $u_n=\dfrac{1+2\times\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n}=\dfrac{1+\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n}=\dfrac{5+4\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{5-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

Ex 2 :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=-5 \\ u_{n+1}=\dfrac{-1}{3}u_n+2 \end{cases}$.

1) Représenter graphiquement la suite (u_n), puis conjecturer la limite de (u_n).



Il semble que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{3}{2}$

2) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=u_n-\dfrac{3}{2}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=u_{n+1}-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{3}u_n+2-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{3}u_n+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}\left(u_n-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{3}v_n$

Ainsi (v_n) est géométrique de premier terme $v_0=u_0-\dfrac{3}{2}=-5-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{13}{2}$ et de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=\dfrac{-13}{2}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n$ et $u_n=v_n+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{13}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{3}{2}$

c) Justifier la limite de (u_n) conjecturée à la question 1).

On a $0<\dfrac{-1}{3}<1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{3}{2}$

3) a) Compléter le programme ci-dessous écrit en Python, afin de déterminer le premier indice n tel que $\left|u_n-\dfrac{3}{2}\right|<0,001$.

```
n=0
U=-5
while abs(U-3/2)>=0.001:
    n=n+1
    U=-1/3*U+2
print(n)
```

b) Donner la valeur retournée par le programme.

On trouve $n=8$.

Ex 3 :

Pour calculer la somme T=5+25+125+...+244140625 , on utilise le programme incomplet écrit en Python ci-dessous :

1) Compléter ce programme.

```
T=0
U=5
while U<=244140625:
    T=T+U
    U=U*5
print(T)
```

2) Par la méthode de votre choix (formule du cours, tableur, programme…) , déterminer ce qu'affiche ce programme. Seul le résultat est demandé.

On reconnaît la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme $u_0=5$ et de raison 5.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n=5\times5^n$.

$u_n=244140625 \quad\Leftrightarrow\quad 5\times5^n=244140625 \quad\Leftrightarrow\quad 5^n=48828125 \quad\Leftrightarrow\quad n=11$

(à faire avec la calculatrice)

Ainsi S= $\sum_{i=0}^{11} u_i = \sum_{i=0}^{11} 5\times 5^i = 5\sum_{i=0}^{11} 5^i = 5\times\frac{1-5^{12}}{1-5} = \frac{9}{2}\left(3^9-1\right)$ =305175780