1ère **Pique-nique n ° 8** **Barème :** **Nom :**

1) 8 pts **2)** 8 pts **3)** 4 pts

- Durée 2 h
- Calculatrices autorisées

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 4} \end{cases}$ et la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$

	A n	B un	C vn
=			
1	0	1	1/2
2	1	1/5	5/6
3	2	-1/7	7/6
4	3	-1/3	3/2
5	4	-5/11	11/6
6	5	-7/13	13/6
7	6	-3/5	5/2
8	7	-11/17	17/6

1) a) Avec un tableur, on a obtenu le résultat suivant :
Quelles formules ont été saisies dans les cellules B2 et C1 puis tirées vers le bas :

En B2 :

En C1 :

b) Conjecturer par la méthode de votre choix la limite de la suite (u_n) .

c) Conjecturer la nature de la suite (v_n) .

2) a) Calculer $v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

b) En déduire la nature de (v_n) , puis une expression de v_n en fonction de n .

c) Exprimer u_n en fonction de v_n .

d) En déduire la forme explicite de u_n .

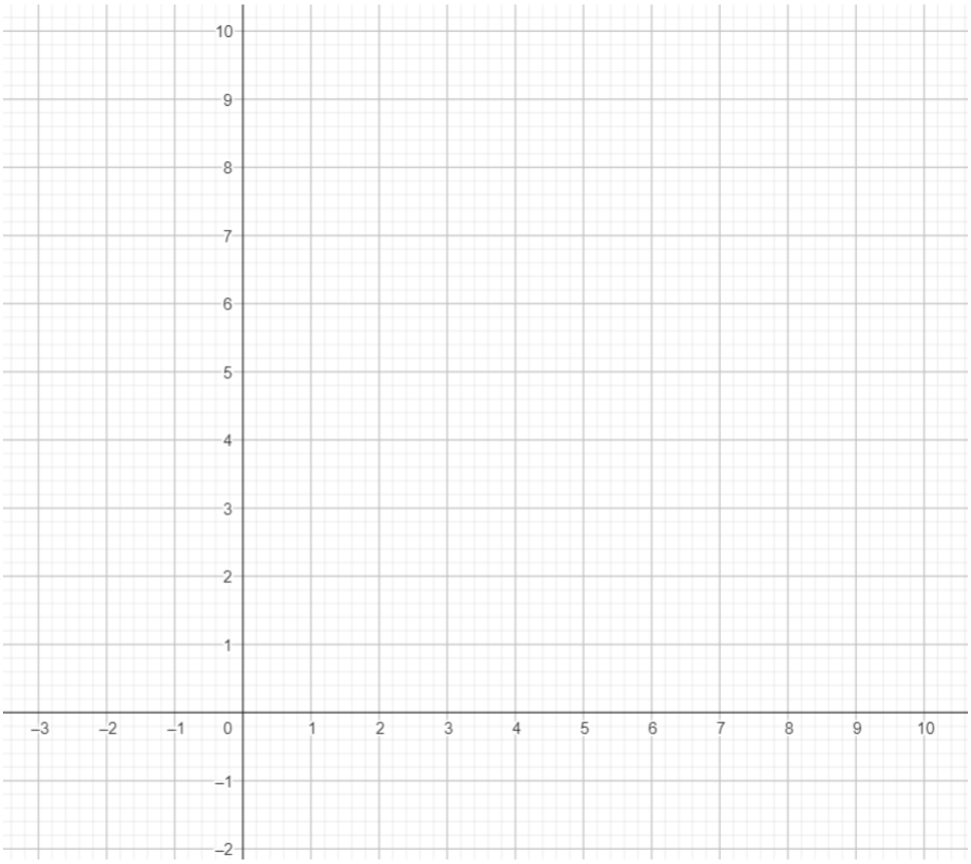
e) Montrer que l'on peut écrire $u_n = \dfrac{\dfrac{3}{n} - 2}{\dfrac{3}{n} + 2}$

f) En déduire, sans rentrer dans les détails que vous étudierez en terminale, la limite de la suite (u_n) .

Ex 2 :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{-1}{2} u_n + 7 \end{cases}$$



1) a) Représenter graphiquement la suite (u_n) .

b) Déterminer l'abscisse du point d'intersection des deux droites utilisées pour la construction précédente.

c) Conjecturer la limite de (u_n)

2) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n - \dfrac{14}{3}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n .

c) Justifier la limite de (u_n) conjecturée à la question 1).

3)

a) Compléter le programme ci-contre écrit en Python, afin de déterminer le premier indice n tel que $\left|u_n - \frac{14}{3}\right| < 0,0001$.

b) Donner la valeur retournée par le programme.

```
n=
U=
while abs(U-14/3)      0.0001 :
    n=
    U=
print(   )
```

Ex 3 : Pour calculer la somme $T = 1000 - 500 + 250 - 125 + ... + \frac{125}{2048}$, on utilise le programme incomplet écrit en Python ci-dessous :

1) Compléter ce programme.

```
T=0
U=1000
while abs(U)          :
    T=
    U=
print(T)
```

2) Par la méthode de votre choix (formule du cours, tableur, programme…) , déterminer ce qu'affiche ce programme.
Seul le résultat est demandé. Une valeur exacte est attendue . Une valeur approchée ne rapporte que la moitié des points.

Correction :

Ex 1 :

1) a)

	A n	B un	C vn
=			=approx(b[])
265	264	-175/177	-0.98870056
266	265	-527/533	-0.98874296
267	266	-529/535	-0.98878505
268	267	-177/179	-0.98882682
269	268	-533/539	-0.98886827
270	269	-535/541	-0.98890943
271	270	-179/181	-0.98895028
272	271	-539/545	-0.98899083

En B2 : =(2*B1-1)/(B1+4)

En C1 : =1/(B1+1)

b) Il semble que $\lim\limits_{n\to+\infty} =-1$

c) Elle semble arithmétique de raison $\frac{1}{3}$

2) a) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{\frac{2u_n-1}{u_n+4}+1}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{\frac{2u_n-1+u_n+4}{u_n+4}}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{1}{\frac{3u_n+3}{u_n+4}}-\frac{1}{u_n+1}=\frac{u_n+4}{3u_n+3}-\frac{3}{3u_n+3}=\frac{u_n+1}{3u_n+3}=\frac{1}{3}$

b) On en déduit que (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0=\frac{1}{2}$.

Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=v_0+\frac{1}{3}n=\frac{1}{2}+\frac{n}{3}$

c) On a : $v_n=\frac{1}{u_n+1} \Leftrightarrow u_n+1=\frac{1}{v_n} \Leftrightarrow u_n=\frac{1}{v_n}-1$

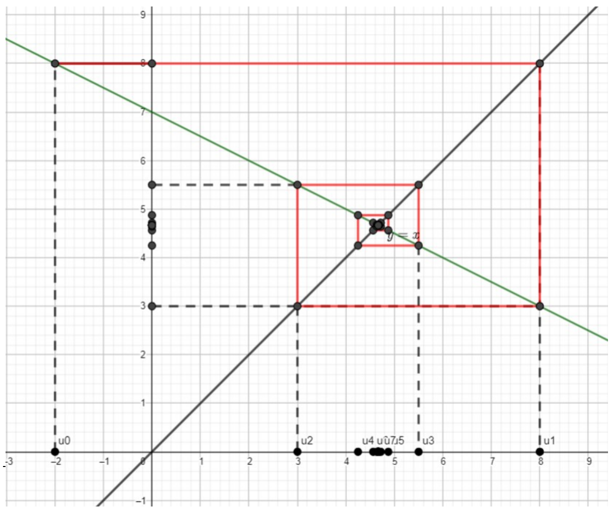
d) On obtient $u_n=\frac{1}{v_n}-1=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{n}{3}}-1=\frac{1}{\frac{3+2n}{6}}-1=\frac{6}{3+2n}-\frac{3+2n}{3+2n}=\frac{3-2n}{3+2n}$

e) Facile en factorisant par n au dénominateur et au numérateur.

f) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}$ =0, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} =-1$

Ex 2 :

1) a)



b) $-\frac{1}{2}x+7=x \Leftrightarrow -x+14=2x \Leftrightarrow 3x=14 \Leftrightarrow x=\frac{14}{3}$

c) Il semble que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{14}{3}$

2) a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{14}{3}=-\frac{1}{2}u_n+7-\frac{14}{3}=-\frac{1}{2}u_n+\frac{7}{3}=-\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{14}{3}\right)=-\frac{1}{2}v_n$

Ainsi (v_n) est géométrique de premier terme $v_0=u_0-\frac{14}{3}=-2-\frac{14}{3}=-\frac{20}{3}$ et de raison $-\frac{1}{2}$

b) $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=\frac{-20}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ et $u_n=v_n+\frac{14}{3}=-\frac{20}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{14}{3}$

c) On a $-1<\frac{-1}{2}<1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ =0 et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{14}{3}$

3) a)

```
n=0
U=-2
while abs(U-14/3)>=0.0001:
    n=n+1
    U=-1/2*U+7
print(n)
```

b) On trouve $n=17$.

Ex 3 :

1)

```
T=0
U=1000
while abs(U)>=125/2048:
    T=T+U
    U=U*(-1/2)
print(T)
```

2)

On reconnaît la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme $u_0=1000$ et de raison $-\frac{1}{2}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n=1000\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$\frac{125}{2048}=1000\left(-\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \frac{125}{2048000}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow (-2)^n=16384 \Leftrightarrow 2^n=16384$ (car 16384>0)

Avec la calculatrice ou trouve $n=14$

Ainsi $S=\sum_{i=0}^{14} u_i = 1000\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{15}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=1000\times\frac{1+\frac{1}{32768}}{\frac{3}{2}} = \frac{1365375}{2048} \approx 666{,}687$

ou

	A	B	C
=			
1	0	1000	
2	1	-500	1365375/2048
3	2	250	
4	3	-125	
5	4	125/2	