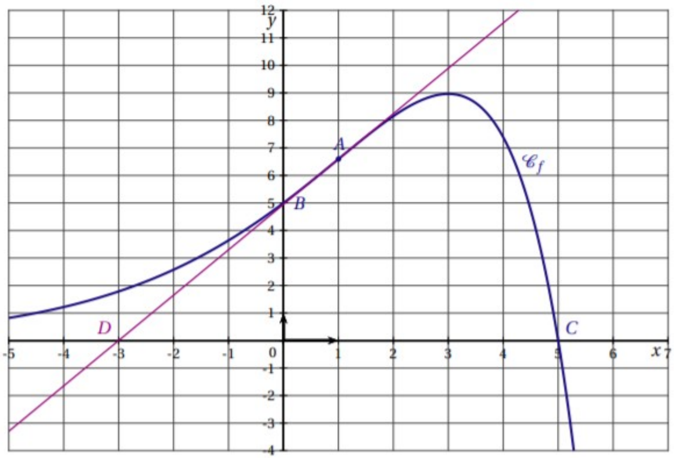
Tcomp **Devoir Surveillé n ° 7**

- Durée 45 min
- Calculatrices autorisées

Nom :

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées . Soyez propre et clair . Bon courage …*

La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.
Elle passe par les points $A(1;4e^{0,5})$, B(0 ; 5) et C(5 ; 0).
Le point D(−3 ; 0) appartient à la tangente à C_f au point A.



Partie A : par lecture graphique

1) Déterminer la valeur exacte de $f'(1)$. Justifier par un calcul.

2) Que semble représenter le point A pour la courbe C_f ?

3) a) Préciser un domaine du plan dont l'aire est égale à $I=\int_0^3 f(x)\,dx$ unités d'aire.

b) Entourer le seul encadrement qui convient parmi :

$0\leqslant I\leqslant 9$ $\qquad$ $10\leqslant I\leqslant 12$ $\qquad$ $20\leqslant I\leqslant 24$

Partie B - Par le calcul

On admet que pour tout réel x , $f(x)=(-x+5)e^{0,5x}$ et $f'(x)=(1,5-0,5x)e^{0,5x}$.

1) a) Déterminer f''

b) Résoudre l'équation $f''(x)=0$. Montrer que le point A est un point d'inflexion de la courbe C_f .

c) Sur quel intervalle la fonction f est-elle convexe ? Justifier.

2) On cherche une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ sous la forme $F(x)=(ax+b)e^{0,5x}$. Déterminer les réels a et b .

3) Calculer $I=\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième

Correction

Asie juin 2013 ex 4 modifié

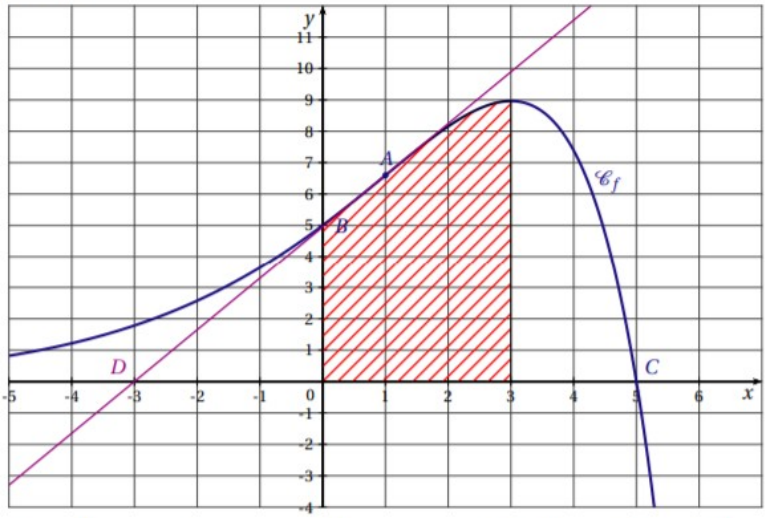
Partie A - Par lecture graphique

1. Le nombre $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe passant par le point A qui est d'abscisse 1 ; d'après le texte, cette tangente est la droite (DA).

   Le coefficient directeur de (DA) est $\dfrac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \dfrac{4\,\mathrm{e}^{0,5}}{1-(-3)} = \mathrm{e}^{0,5}$

2. Le point A semble représenter un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. **a.** Le domaine hachuré en rouge sur le graphique ci-dessous, délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=3$, a une aire égale à $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ unités d'aire.



   b. Le seul encadrement qui convient parmi les trois proposés est : $20 \leqslant I \leqslant 24$; il suffit de compter le nombre de rectangles d'aires 1 contenus dans la partie hachurée.

Partie B - Par le calcul

On admet que pour tout réel x, $f(x) = (-x+5)\,\mathrm{e}^{0,5x}$ et $f'(x) = (1,5-0,5x)\,\mathrm{e}^{0,5x}$.
On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur $\mathbb{R}$.

1. **a.** $f''(x) = -0,5\mathrm{e}^{0,5x} + (1,5-0,5x)\left(0,5\mathrm{e}^{0,5x}\right) = -0,5\mathrm{e}^{0,5x} + 0,75\mathrm{e}^{0,5x} - 0,25x\mathrm{e}^{0,5x}$

   $= 0,25\mathrm{e}^{0,5x} - 0,25x\mathrm{e}^{0,5x} = 0,25(-x+1)\,\mathrm{e}^{0,5x}$

   b. $f''(x) = 0 \iff 0,25(-x+1)\,\mathrm{e}^{0,5x} = 0 \iff -x+1 = 0$ car $\mathrm{e}^{0,5x} > 0$ pour tout réel x.

   $f''(x) = 0 \iff x = 1$

   Le point de la courbe d'abscisse 1 est donc le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$; il s'agit du point A.

   c. On sait qu'une fonction est convexe sur un intervalle si et seulement si sa dérivée seconde est strictement positive sur cet intervalle.

   On résout $f''(x) > 0 \iff 0,25(-x+1)\,\mathrm{e}^{0,5x} \iff -x+1 > 0$ car $\mathrm{e}^{0,5x} > 0$ pour tout x.

   $f''(x) > 0 \iff -x+1 > 0 \iff 1 > x \iff x < 1$

   La fonction f est donc convexe sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.

2. On a $F'(x) = a\,\mathrm{e}^{0,5x} + 0,5(ax+b)\mathrm{e}^{0,5x} = (0,5\,ax + 0,5\,b + a)\mathrm{e}^{0,5x}$

En identifiant avec $f(x)$, on obtient :

$$\begin{cases} 0,5\,a = -1 \\ 0,5\,b + a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 14 \end{cases}$$

Ainsi pour tout réel x, on a $F(x) = (-2x+14)\mathrm{e}^{0,5x}$.

3. $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(0) = \left((-6+14)\,\mathrm{e}^{0,5\times 3}\right) - \left(14\,\mathrm{e}^{0}\right) = 8\mathrm{e}^{1,5} - 14 \approx 21,85$ unités d'aire.