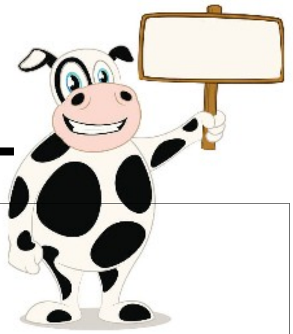
Tcomp **Pique-nique n ° 5**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème : **Nom :**

1) 10 pts **2)** 10 pts



Répondre sur cette feuille

Ex 1 : Répondre à chacune des questions suivantes **en détaillant** les calculs :

1	Déterminer la fonction réciproque de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-5$	
2	Résoudre l'équation suivante : $(e^x-5)(e^{3x}-8)=0$	
3	Calculer : $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{3}{x}-e\ln x$	
4	Déterminer le plus petit entier n tel que : $7\times\left(\frac{5}{9}\right)^n<0,01$	
5	Résoudre l'équation suivante : $\ln(5x+2)\geqslant\ln(4-x)$	

Ex 2 : On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie.
Des relevés statistiques ont permis de modéliser, par une fonction f , le nombre de malades durant l'épidémie.

Cette fonction f est définie sur [1 ; 26] par : $f(t)=12t\ln(t)-\frac{3}{2}t^2+5$ où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f .

2) a) Déterminer la fonction dérivée f'' de la fonction f' .

b) Déterminer le tableau de variation de la fonction f' sur l'intervalle [1;26]

c) Montrer que l'équation $f'(t)=0$ admet, dans l'intervalle [1;26], une solution et une seule qu'on notera α et donner l'encadrement de α par deux entiers naturels consécutifs.

d) En déduire le signe de $f'(t)$ sur [1;26] et les variations de f sur [1;26].

3) Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.
a) Dans le contexte du problème, donner une interprétation de l'expression mathématique suivante : « sur [4 ; 26], f' est décroissante. »

b) À partir des questions précédentes, déterminer le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malades par semaine a commencé à diminuer.

Correction :

Ex 1 : Répondre à chacune des questions suivantes en détaillant les calculs :

1	Déterminer la fonction réciproque de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-5$	$y=3x-5 \Leftrightarrow 3x=y+5$ $\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}y+\frac{5}{3}$ On obtient $f^{-1}:x\longmapsto \frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$
2	Résoudre l'équation suivante : $(\mathrm{e}^x-5)(\mathrm{e}^{3x}-8)=0$	$(\mathrm{e}^x-5)(\mathrm{e}^{3x}-8)=0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x=5$ ou $\mathrm{e}^{3x}=8$ $\Leftrightarrow x=\ln(5)$ ou $3x=\ln(8)$ $\Leftrightarrow x=\ln(5)$ ou $3x=3\ln(2)$ $\Leftrightarrow x=\ln(5)$ ou $x=\ln(2)$ D'où l'ensemble S des solutions de l'équation de départ : $S=\{\ln(2);\ln(5)\}$
3	Calculer : $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{3}{x}-\mathrm{e}\ln x$	$\lim\limits_{x\to+\infty}-3x-\mathrm{e}\ln x=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{3}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0+}-\mathrm{e}\ln x=+\infty$, donc par somme $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{3}{x}-\mathrm{e}\ln x=+\infty$
4	Déterminer le plus petit entier n tel que : $7\times\left(\frac{5}{9}\right)^n<0,01$	$7\times\left(\frac{5}{9}\right)^n<0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^n<\frac{0,01}{7}$ $\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{5}{9}\right)^n\right)<\ln\left(\frac{0,01}{7}\right)$ $\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{5}{9}\right)<\ln\left(\frac{0,01}{7}\right)$ $\Leftrightarrow n>\frac{\ln\left(\frac{0,01}{7}\right)}{\ln\left(\frac{5}{9}\right)}$ (car $\ln\left(\frac{5}{9}\right)<0$) Or $\frac{\ln\left(\frac{0,01}{7}\right)}{\ln\left(\frac{5}{9}\right)}\approx 11,15$ Donc n=12
5	Résoudre l'équation suivante : $\ln(5x+2)\geqslant\ln(4-x)$	L'équation n'a de sens que pour : $\begin{cases}5x+2>0\\4-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-\frac{2}{5}\\x<4\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{2}{5};4\right[$ Pour $x\in\left]-\frac{2}{5};4\right[$, on a : $\ln(5x+2)\geqslant\ln(4-x) \Leftrightarrow 5x+2\geqslant 4-x \Leftrightarrow 6x\geqslant 2 \Leftrightarrow x\geqslant\frac{1}{3}$ L'ensemble des solutions est $S=\left[\frac{1}{3};4\right[$

Ex 2 :

1) $f'(t)=12\ln(t)-3t+12$

2) a) $f''(t)=\dfrac{12}{t}-3$

b) Sur [1;26], on a :

$\dfrac{12}{t}-3>0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{12}{t}>3 \quad \Leftrightarrow \quad 4>t$

t	1		4		26
$f''(t)$		+	0	-	
f'	9	$\nearrow$	$24\ln(2)$	$\searrow$	12ln(26)-66

12ln(26)-66 ≈ -26,9

c) Pour tout $x\in[1;4]$, $f'(x)\geqslant 9>0$. Donc l'équation $f'(x)=0$ n'admet pas de solution sur $[1;4]$

f' est continue et strictement décroissante sur $[4;26]$.

$0\in[f'(26);f'(4)]$

D'après le corollaire du TVI, l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution sur $[4;26]$

On trouve 14 < α < 15.

d)

Du tableau de variations, on peut déduire que $f'(t)>0$ sur $[1;\alpha[$ et que $f'(t)<0$ sur $]\alpha;26]$.

Donc la fonction f
- est strictement croissante sur $[1;\alpha]$;
- est strictement décroissante sur $[\alpha;26]$;
- atteint un maximum pour $x=\alpha$.

3. Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.

a. L'expression mathématique suivante : « sur $[4 ; 26]$, f' est décroissante » signifie que sur cet intervalle, la vitesse de propagation de la maladie diminue.

b. Le nombre de malades par semaine commence à diminuer quand la vitesse de propagation devient négative, donc quand $f'(t)$ devient négatif, c'est-à-dire pour $t>\alpha$; donc il s'est écoulé 14 semaines avant que le nombre de malades par semaine commence à diminuer.