Texp **Pique-nique n ° 3**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
1) 5 pts **2)** 6 pts **3)** 9 pts	

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : 1) Développer $(a+b)^4$.

2) En utilisant les formules d'Euler, en déduire la linéarisation de $\cos^4 x$.

Ex 2 : Soit $P(z)=z^4+8z^3-3z^2+8z-4$.

1) Démontrer que pour tout complexe z , on a : $P(\overline{z})=\overline{P(z)}$

2) Déterminer une racine imaginaire pure évidente de P.

3) Quelle autre racine la question 1 permet-elle de trouver ?

4) Factoriser P dans les réels, sous la forme $P(z)=(z^2+1)\times Q(z)$ où Q est un trinôme du second degré.

5) En déduire une meilleure forme factorisée de P .

Ex 3 : 1) Déterminer le module et un argument de $\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^5$.

2) On considère maintenant le complexe $z=\frac{9\sqrt{6}}{8}e^{\frac{i\pi}{12}}$

a) Pour quelles valeurs de n , z^n est-il un réel positif ?

b) Pour quelles valeurs de n , z^n est-il un imaginaire pur ?

c) Pour quelle(s) valeur(s) $x\in\mathbb{R}$, $xz \in \mathbb{U}$?

d) Pour quelle(s) valeur(s) $x\in\mathbb{C}$, $xz \in \mathbb{U}$?

3) On considère le complexe $a=\frac{2\sqrt{6}}{27}+\frac{2\sqrt{2}}{9}i$.

a) Ecrire a sous forme exponentielle.

b) Sans calcul, montrer que $\frac{\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^{-5}}{a} \in \mathbb{U}$?

correction :

Ex 1 :

1) $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

2) $\cos^4 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left((e^{ix})^4+4(e^{ix})^3(e^{-ix})+6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2+4e^{ix}(e^{-ix})^3+(e^{-ix})^4\right) = \frac{1}{16}\left(e^{i4x}+4e^{i2x}+6+4e^{-i2x}+e^{-i4x}\right)$

On a donc $\cos^4 x=\frac{1}{16}\left(e^{i4x}+e^{-i4x}+4\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right)+6\right) = \frac{1}{16}(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6) = \frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$

Ex 2 :

1) $\overline{P(z)}=\overline{z^4+8z^3-3z^2+8z-4}=\overline{z}^4+\overline{8}\,\overline{z}^3-\overline{3}\,\overline{z}^2+\overline{8}\,\overline{z}-\overline{4}$
Ce qui donne $\overline{P(z)}=\overline{z}^4+8\overline{z}^3-3\overline{z}^2+8\overline{z}-4=P(\overline{z})$

2) $P(i)=0$

3) $P(\overline{i})=\overline{P(i)}=0$, donc $-i$ est aussi une racine de P.

4) Ainsi P est factorisable par $(z-i)$ et $(z+i)$ donc par :

$(z-i)(z+i)=z^2+1$

On peut écrire P sous la forme $P(z)=(z^2+1)(z^2+az-4)$

(On sait déjà que le coefficient de z^2 du trinôme du second degré est 1, car le coefficient de z^4 de P est 1, et en utilisant le même raisonnement on peut dire que le terme constant du trinôme du second degré est -4)

Pour tout complexe z , on a :
$$\begin{aligned}(z^2+1)(z^2+az-4)&=z^4+az^3-4z^2+z^2+az-4\\&=z^4+az^3-3z^2+az-4\end{aligned}$$

En identifiant avec $P(z)=z^4+8z^3-3z^2+8z-4$, on obtient $a=8$

Donc pour tout complexe z , on a : $P(z)=(z^2+1)(z^2+8z-4)$

5) On cherche maintenant à factoriser le trinôme Q .

On obtient facilement les racines $-4-2\sqrt{5}$ et $-4+2\sqrt{5}$

Ce qui donne $P(z)=(z^2+1)(z+4+2\sqrt{5})(z+4-2\sqrt{5})$

Ex 3 :

1) On a $3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $2-2i=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^5=\left(\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^5=\left(\frac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^5=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^5=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^5$$

On obtient $\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^5=\sqrt{\frac{3}{2}}^5 e^{i\frac{25\pi}{12}} = \frac{9\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}e^{\frac{i\pi}{12}} = \frac{9\sqrt{6}}{8}e^{\frac{i\pi}{12}}$

Ainsi $|z|=\frac{9\sqrt{6}}{8}$ et $\arg(z)=\frac{\pi}{12}\quad[2\pi]$

2) a) On a $\arg(z^n)=n\arg(z)=\frac{n\pi}{12}\quad[2\pi]$

$z^n \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{n\pi}{12}=0+2k\pi \Leftrightarrow n\pi=24k\pi \Leftrightarrow n=24k \quad (k\in\mathbb{Z})$

b) $z^n\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{n\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow n\pi=6\pi+12k\pi \Leftrightarrow n=6+12k \quad (k\in\mathbb{Z})$

c) $xz \in \mathbb{U} \Leftrightarrow |xz|=1 \Leftrightarrow |x|\frac{9\sqrt{6}}{8}=1 \Leftrightarrow |x|=\frac{8}{9\sqrt{6}} \Leftrightarrow |x|=\frac{8\sqrt{6}}{54} \Leftrightarrow |x|=\frac{4\sqrt{6}}{27} \Leftrightarrow x=\frac{4\sqrt{6}}{27}$ ou $x=-\frac{4\sqrt{6}}{27}$

d) pour quelle(s) valeur(s) $x \in \mathbb{C}$, $xz \in \mathbb{U}$?

De la même façon, on obtient :

$$|x| = \frac{4\sqrt{6}}{27} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4\sqrt{6}}{27} e^{i\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

3) a) $a = \frac{4\sqrt{6}}{27} e^{\frac{i\pi}{3}}$

b) $\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^5 = \frac{9\sqrt{6}}{8} e^{\frac{i\pi}{12}}$, donc (d'après 2d) $a \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^5 \in \mathbb{U}$

Or $\frac{\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^{-5}}{a} = \frac{1}{a\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^5}$, donc $\frac{\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^{-5}}{a} \in \mathbb{U}$