Texp **Pique-nique n ° 8** **Nom :**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Répondre sur cette feuille

Partie A : préliminaires

1) a) Soit n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que : $n^2 \equiv N-1$ [N] . Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1$ [N].

b) Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1$ [26].

On admettra que l'unique entier k tel que : $0 \leqslant k \leqslant 25$ et $5k \equiv 1$ [26] vaut 21.

2) On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice $6A - A^2$

b) En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1} , peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, ou α et β sont deux réels que l'on déterminera.

c) Vérifier que : $B = 5\,A^{-1}$.

d) Démontrer que si AX = Y , alors 5X = BY

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

• Le mot à coder est remplacé par la matrice $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-contre :

• La matrice X est transformée en la matrice $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ telle que : Y = AX.

Exemple : « OU »(mot à coder) $\rightarrow X\begin{pmatrix}14\\20\end{pmatrix} \rightarrow Y=\begin{pmatrix}76\\82\end{pmatrix} \rightarrow R=\begin{pmatrix}24\\4\end{pmatrix} \rightarrow$ « YE » (mot codé).

• La matrice Y est transformée en la matrice $R=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

• Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ telle que : Y = AX.

1) Démontrer que $\begin{cases}5x_1=2y_1-y_2\\5x_2=-3y_1+4y_2\end{cases}$

2) En utilisant la question 1. b. de la partie A, établir que : $\begin{cases}x_1\equiv 16y_1+5y_2\\x_2\equiv 15y_1+6y_2\end{cases}$ [26]

3) Décoder le mot « QP ».

Correction : Centres étrangers 32 12 juin 2014

Partie A : préliminaires

1. a. $n^2 \equiv N-1 \mod N \Rightarrow \left(n^2\right)^2 \equiv (N-1)^2 \mod N$

Or $(N-1)^2 = N^2 - 2N + 1$ et $N^2 \equiv 0 \mod N$ et $-2N \equiv 0 \mod N$, donc

$(N-1)^2 \equiv 1 \mod N$ et finalement car $n^4 = n \times n^3$,

$n \times n^3 \equiv 1 \mod N$.

b. On a $5^2 = 25 = 26 - 1$, donc $5^2 \equiv -1 \mod 26$.

La question précédente montre que $5 \times 5^3 \equiv 1 \mod 26$.

Donc $k_1 = 5^3 = 125$.

2. a. $6A = \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix}$, donc $6A - A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I$ (I matrice unité).

b. On a $6A - A^2 = A(6I - A) = 5I$ ou encore $A \times \frac{1}{5}(6I - A) = I$: cette égalité montre que la matrice A est inversible et que son inverse est

$A^{-1} = \frac{1}{5}(6I - A) = \frac{6}{5}I - \frac{1}{5}A$.

c. $A^{-1} = \frac{6}{5}I - \frac{1}{5}A \iff 5A^{-1} = 6I - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = B$.

Conclusion $B = 5A^{-1}$.

d. En partant de l'égalité précédente :

$B = 5A^{-1} \iff BA = 5A^{-1}A \iff BA = 5I \iff BAX = 5IX \iff$

$BY = 5X$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

« ET » est codé par la matrice $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix}$.

Puis $Y = AX = \begin{pmatrix} 35 \\ 50 \end{pmatrix}$, puis $R = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \end{pmatrix}$ et d'après le tableau « ET » est codé « JY ».

Partie C : procédure de décodage

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

1. On a $Y = AX \iff A^{-1}Y = X \iff 5A^{-1}Y = 5X = BY$ soit $Y = AX \iff \begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$

2. La question 1. b. de la **partie A** a montré que $5 \times 21 \equiv 1 \mod 26$. Donc en reprenant le système de la question précédente et en multipliant par 21, on obtient :

$$\begin{cases} 21 \times 5x_1 = 21 \times (2y_1 - y_2) \\ 21 \times 5x_2 = 21 \times (-3y_1 + 4y_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 21 \times 5x_1 = 42y_1 - 21y_2 \\ 21 \times 5x_2 = -63y_1 + 84y_2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \mod 26 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \mod 26 \end{cases}$$

3. « QP » est associé à la matrice $\begin{pmatrix} 16 \\ 15 \end{pmatrix}$.

En utilisant le résultat précédent :

$$\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \mod 26 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \mod 26 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \equiv 256 + 75 \mod 26 \\ x_2 \equiv 240 + 90 \mod 26 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x_1 \equiv 331 \mod 26 \\ x_2 \equiv 330 \mod 26 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 19 \\ x_2 = 18 \end{cases}$$

Le mot décodé est donc « TS ».