Texp **Devoir n ° 3**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème : A côté de chaque question	**Nom :**

D'après Baccalauréat S Polynésie : 9 septembre 2015

Ex 1 : Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $\mathrm{S}(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n .

2pts 1) Calculer S(6) et S(7)

2pts 2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $\mathrm{S}(n) \geqslant 1+n$.

2pts b) Quels sont les entiers naturels n tels que $\mathrm{S}(n)=1+n$?

3) On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.

2pts a) Démontrer que $\mathrm{S}(n)=(1+p)(1+q)$.

2pts b) On considère la proposition suivante : « Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts, $\mathrm{S}(n\times m)=\mathrm{S}(n)\times\mathrm{S}(m)$ ».
Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

4) On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k , où p est un nombre premier et k un nombre entier naturel non nul.
2pts a) Quels sont les diviseurs de n ?

2pts b) En déduire que $\mathrm{S}(n)=\dfrac{1-p^{k+1}}{1-p}$.

5) On suppose dans cette question que n s'écrit $p^{13} \times q^7$, où p et q sont des nombres premiers distincts.

4 pts a) Soit m un entier naturel. Nous allons maintenant essayer de démontrer que m divise n si, et seulement si, il existe deux nombres entiers s et t avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$ tels que $m = p^s \times q^t$.

Pour cela, compléter la preuve partielle ci-dessous :

• On suppose que l'entier naturel m s'écrit $m = p^s \times q^t$ avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$. (***Je vous laisse faire en entier l'étude directe)***

On peut donc dire que m est un diviseur de n .

Réciproque : (***Je vous guide bien car ce n'est pas simple)***

• Soit m un diviseur de n . On décompose m en produit de facteurs premiers. Si r est un facteur premier de la décomposition de m , alors r divise $p^{13} \times q^7$ donc, d'après ……………..………... , r divise p^{13} ou r divise q^7 , donc $r = p$ ou ……... .

Donc m s'écrit …………………... avec $s \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{N}$.

Comme m est un diviseur de n , on peut écrire $n = m \times m'$ où m' est un autre diviseur de n qui peut donc s'écrire …………... avec $s' \in \mathbb{N}$ et $t' \in \mathbb{N}$

Or $n = p^{13} \times q^7$ et $n = m \times m'$.

On a donc $n = m \times m'$ = ……………………… = ……………….………

D'après ………………. ………………. ………………. ………………. ………………. . ………. . ………, on peut dire que $s + s' = 13$ et que $t + t' = 7$

et comme s , s' , t et t' sont des entiers naturels, on peut en déduire que $s \leqslant 13$ et que $t \leqslant 7$.

Donc tout diviseur m de n s'écrit ………………. . ………………. . ………………. .

2pts b) Compléter les cercles pour lister tous les diviseurs de $n = p^{13} \times q^7$:

	p	p^2	$\dots$		$\dots$	p^{13}
q	pq	$p^2 q$	$\dots$	$p^i q$	$\dots$	$p^{13} q$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	pq^j	$p^2 q^j$	$\dots$	$p^i q^j$	$\dots$	$p^{13} q^j$
$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
q^7		$p^2 q^7$	$\dots$	$p^i q^7$	$\dots$	$p^{13} q^7$

BONUS 2pt c) Trouver a tel que que $S(n) = \dfrac{1-p^a}{1-p} \times \dfrac{1-q^8}{1-q}$

correction : *d'après* ***Polynésie 9 septembre 2015***

Pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}^*$, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1. Le nombre 6 a pour diviseurs positifs 1, 2, 3 et 6 ; donc $S(6) = 1+2+3+6 = 12$.
Le nombre 7 n'a que 2 diviseurs, 1 et 7 ; donc $S(7) = 1+7 = 8$.

2. a. Tout nombre entier n supérieur ou égal à 2 a au moins 2 diviseurs, 1 et lui-même ; donc $S(n) \geqslant 1+n$.

b. Les entiers naturels n tels que $S(n) = 1+n$ sont les entiers qui ont exactement 2 diviseurs : 1 et n ; ce sont donc tous les nombres premiers.

3. On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.

a. Si $n = p \times q$ où p et q sont deux nombres premiers distincts, alors les seuls diviseurs de n sont : 1, p, q et $p \times q$.
Donc $S(n) = 1+p+q+pq = (1+p)+q(1+p) = (1+p)(1+q)$.

b. On considère la proposition suivante :
« Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts, $S(n \times m) = S(n) \times S(m)$ ».
L'ensemble des diviseurs de 4 est $\{1 ; 2 ; 4\}$ donc $S(4) = 1+2+4 = 7$.
On a déjà vu que $S(6) = 12$.
$4 \times 6 = 24$; les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24, donc $S(24) = 1+2+3+4+6+8+12+24 = 60$.
$S(4) \times S(6) = 7 \times 12 = 84$ est différent de $S(4 \times 6) = 60$.
La proposition est donc fausse.

4. On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k, où p est un nombre premier et k un nombre entier naturel non nul.

a. Les diviseurs de $n = p^k$ sont $1, p, p^2, \dots, p^k$.

b. La suite $(1, p, p^2, \dots, p^k, \dots)$ est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison p ; on en déduit que $s(n) = 1+p+p^2+\dots+p^k = \dfrac{1-p^{k+1}}{1-p}$ d'après la formule qui donne la somme des premiers termes d'une suite géométrique : premier terme $\times \dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$

5. On suppose que n s'écrit $p^{13} \times q^7$, où p et q sont des nombres premiers distincts.

a.
- On suppose que l'entier naturel m s'écrit $p^s \times q^t$ avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$.
$\left(p^s \times p^{13-s}\right)\left(q^t \times q^{7-t}\right) = p^{13} \times q^7 \Leftrightarrow \left(p^s \times q^t\right)\left(p^{13-s} \times q^{7-t}\right) = n \Leftrightarrow m\left(p^{13-s} \times q^{7-t}\right) = n$.
On peut donc dire que m est un diviseur de n.
- Soit m est un diviseur de n. On décompose m en produit de facteurs premiers ; si r est un facteur premier de la décomposition de m, alors r divise $p^{13}q^7$ donc, d'après le théorème de Gauss, r divise p^{13} ou r divise q^7, donc $r = p$ ou $r = q$.
Donc m s'écrit $p^s \times q^t$ avec $s \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{N}$.
Comme m est un diviseur de n, on peut écrire $n = m \times m'$ où m' est un autre diviseur de n qui peut donc s'écrire $m' = p^{s'} \times q^{t'}$. Or $n = p^{13} \times q^7$ et $n = m \times m'$.
On a donc $p^{13}q^7 = p^s q^t \times p^{s'} q^{t'}$ ce qui équivaut à $p^{13}q^7 = p^{s+s'} q^{t+t'}$.
D'après l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, on peut dire que $s+s' = 13$ et que $t+t' = 7$ et comme s, s', t et t' sont des entiers naturels, on peut en déduire que $s \leqslant 13$ et que $t \leqslant 7$.
Donc tout diviseur m de n s'écrit $p^s \times q^t$ avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$.

Tous les diviseurs de n sont :

1	p	p^2	$\dots$	p^i	$\dots$	p^{13}
q	pq	p^2q	$\dots$	p^iq	$\dots$	$p^{13}q$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
q^j	pq^j	p^2q^j	$\dots$	p^iq^j	$\dots$	$p^{13}q^j$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
q^7	pq^7	p^2q^7	$\dots$	p^iq^7	$\dots$	$p^{13}q^7$

b. La somme des $14 \times 8 = 112$ diviseurs de n est :

$$\begin{aligned}
S(n) &= \left(1+p+p^2+\dots+p^{13}\right)+\left(q+pq+p^2q+\dots+p^{13}q\right)+\dots+\left(q^7+pq^7+p^2q^7+\dots+p^{13}q^7\right)\\
&= \left(1+p+p^2+\dots+p^{13}\right)+\left(1+p+p^2+\dots+p^{13}\right)q+\dots+\left(1+p+p^2+\dots+p^{13}\right)q^7\\
&= \left(1+p+p^2+\dots+p^{13}\right)\left(1+q+q^2+\dots+q^7\right) = \frac{1-p^{14}}{1-p} \times \frac{1-q^8}{1-q}
\end{aligned}$$