T S 4, 5, 8

Devoir Surveillé n°1

- Durée 2 h
- Mardi 25 Septembre 2018
- Une seule calculatrice autorisée

Barème indicatif :

1) 10 points

2) 10 points

Commentaires :
Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées . Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage ...

Exercice 1 : (10 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=2$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+2}{2u_n+1}$.

1. a) Calculer u_1 , u_2 , u_3 , u_4 . On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
   b) Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B
1	n	u_n
2	0	2
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

   Quelle formule doit-on rentrer dans la cellule B3 pour qu'en la copiant vers le bas, les termes de la suite (u_n) s'affichent ?
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $u_n>0$.
3. a) Vérifier que si *n* est l'un des entiers 0, 1, 2, 3,4 alors u_n-1 a le même signe que $(-1)^n$.
   b) Établir que pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1}-1=\dfrac{-u_n+1}{2u_n+1}$.
   c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, u_n-1 a le même signe que $(-1)^n$.
4. Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$.
   a) Établir que pour tout entier naturel *n*, $v_{n+1}=\dfrac{-u_n+1}{3u_n+3}$.
   b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   c) En déduire l'expression de v_n en fonction de *n* et vérifier que pour tout entier *n*, $v_n\neq 1$.
   d) Montrer que pour tout entier naturel *n*, $u_n=\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.
   e) Exprimer u_n en fonction de *n* et déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 : (10 points)

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n}$.

Partie A :

1. a) On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, le terme de rang n de la suite. Compléter l'algorithme proposé :

Algorithme :

```
Lire n
v ← ...
 Pour i variant de 1 à n faire
      v ← ....
Fin Pour
Afficher …
```

   b) Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de v_0 jusqu'à v_n ?
2. En utilisant la calculatrice, quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n)?
3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

   c) La suite (v_n) est-elle monotone ?

   d) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B : Recherche de la limite de la suite (v_n).

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par : $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Partie C : Retour à l'algorithmique. *(bonus)*

Ecrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $v_n > 2{,}999$.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en considération.

Correction :

Ex 1 :

Sujet tiré de Métropole sept 2013
https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_Metropole_S_sept_2013.pdf (ex4)

Pour les questions modifiées :

b) Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B
1	n	u_n
2	0	2
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

Quelle formule doit-on rentrer dans la cellule B3 pour qu'en la copiant vers le bas, les termes de la suite (u_n) s'affichent ?

=(B2+2)/(2*B2+1)

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
Récurrence très facile . Idée :

$$u_n>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{u_n+2}{2u_n+1}>0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1}>0$$

4) c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n et vérifier que pour tout entier n, $v_n \neq 1$.

… $v_n=\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ ce qui est clairement différent de 1.

4) d) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n=\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

$$\frac{1+v_n}{1-v_n} = \frac{1+\frac{u_n-1}{u_n+1}}{1-\frac{u_n-1}{u_n+1}} = \frac{\frac{u_n+1+u_n-1}{u_n+1}}{\frac{u_n+1-u_n+1}{u_n+1}} = \frac{\frac{2u_n}{u_n+1}}{\frac{2}{u_n+1}} = u_n$$

Ex 2 :

Sujet tiré de liban 2013
https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_S_Liban_2013.pdf **(ex 4)**

Pour les questions modifiées :

2. a) On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, le terme de rang n de la suite. Compléter l'algorithme proposé :

Algorithme :

```
Lire n
v ← 1
 Pour i variant de 1 à n faire
        v ← 9/(6-v)
Fin Pour
Afficher v
```

b) Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de v_0 jusqu'à v_n ?

Algorithme :

```
Lire n
v ← 1
 Pour i variant de 1 à n faire
        Afficher v
        v ← 9/(6-v)
Fin Pour
Afficher v
```

Partie C : Retour à l'algorithmique. ***(bonus)***
Ecrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $v_n > 2,999$.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en considération.

Algorithme :

```
n ← 0
v ← 1
 Tant que v<=2,9999
        n ← n+1
        v ← 9/(6-v)
Fin Pour
Afficher n
```