

TS 9 Devoir Surveillé n° 6

- Durée 1 h 10

- Calculatrices autorisées

Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées. La rédaction est importante. Soyez propre et clair.
Bon courage ...

Nom :

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f ainsi que la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
3. En déduire que si $x \geq e$ alors $f(x) \geq e$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 5 \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$$

1. Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} , placer les points A_0 , A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0 , u_1 et u_2 . On laissera apparents les traits de construction.
Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq e$.
b. Déterminer les variations de la suite (u_n) .
c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
d. Déterminer sa limite ℓ .
3. On donne l'algorithme suivant :

```
X est une variable réelle ; Y est une variable entière
Affecter 5 à X et 0 à Y
Tant que X > 2,72
    Faire
        Affecter (X / ln X) à X
        Affecter Y + 1 à Y
    Fin de Tant que
    Afficher Y
```

À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	5	3,106 674 672 8	2,740 652 532 3	2,718 372 634 6	2,718 281 830 01	2,718 281 828 5

