

Exercice 2

Partie A) 1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x e^x + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - x + \frac{2}{e^x} \right)$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

Donc par somme et produit, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - x + \frac{2}{e^x} \right) = -\infty$

2) g est dérivable sur $]-\infty; 0]$ (indiqué dans l'énoncé)

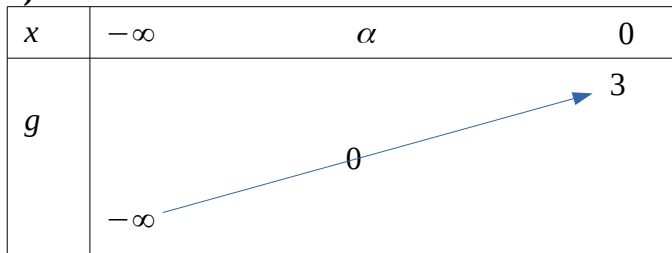
(Sinon, en TS, il suffit de dire par somme et composée de fonctions dérivables)

$$\forall x \leq 0, g'(x) = -e^{-x} + e^{-x} - x e^{-x} = -x e^{-x}$$

Pour tout $x \leq 0$, on a $e^{-x} > 0$ et $-x \geq 0$, donc $g'(x) \geq 0$

g' ne s'annule qu'en 0, donc g est strictement croissante.

3)



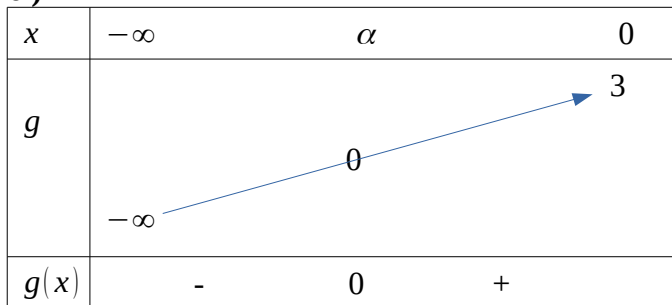
4) g est dérivable (donc continue) et strictement croissante sur $]-\infty; 0]$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $g(0) = 3$

Comme $0 \in]-\infty; 0]$, d'après le théorème des bijections (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), on peut dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-\infty; 0]$.

$$5) g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 0 = e^{-\alpha} + \alpha e^{-\alpha} + 2 \Leftrightarrow e^{-\alpha}(1 + \alpha) = -2 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = -\frac{2}{1 + \alpha}$$

6)



Partie B) 1)

$$g(-1,5) < 0 \text{ et } g(-1,45) > 0 .$$

En appliquant le théorème des bijections sur $[-1,5; -1,45]$, on obtient le résultat.

2) a)

a	b	c	Signe de $g(c)$	$b - a > 10^{-2}$
-1,5	-1,45	-1,475	négatif	Oui 0,05
-1,475	-1,45	-1,4625	positif	Oui 0,025
-1,475	-1,4625	-1,46875	négatif	Oui 0,0125
-1,46875	-1,4625		négatif	Non 0,00625

B) $-1,47 < \alpha < -1,46$

Partie C :

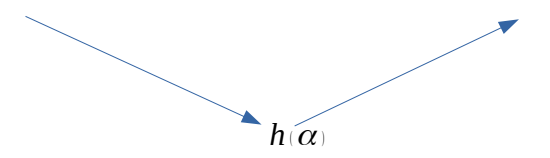
1) h est dérivable sur $]-\infty; 0]$ (indiqué dans l'énoncé)

(Sinon, en TS, il suffit de dire par composée et quotient de fonctions dérivables)

Pour tout $x \leq 0$, on a :

$$h'(x) = 3 \times \frac{1 \times (e^{-x} + 2) - x(-e^{-x})}{(e^{-x} + 2)^2} = 3 \frac{g(x)}{(e^{-x} + 2)^2}$$

2)

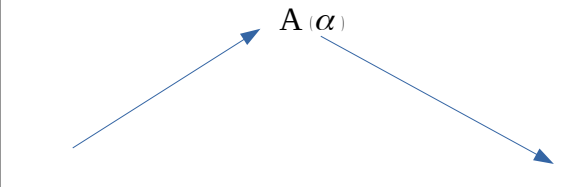
x	$-\infty$	α	0
$h'(x)$	-	0	+
h			

$$h(\alpha) = \frac{3\alpha}{e^{-\alpha} + 2} = \frac{3\alpha}{-\frac{2}{1+\alpha} + 2} = \frac{3\alpha}{\frac{-2 + 2(1+\alpha)}{1+\alpha}} = \frac{3}{2}(1+\alpha)$$

Partie D :

1) Pour $x \leq 0$, on a $A(x) = OP \times OQ = -xf(x) = -\frac{3x}{e^{-x} + 2} = -h(x)$

2)

x	$-\infty$	α	0
A			

$$A(\alpha) = -h(\alpha) = -\frac{3}{2}(1+\alpha) \approx 0,69$$