

APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

1) DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

A) DU SENS DE VARIATION AU SIGNE DE LA DÉRIVÉE

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I .

- Si f est croissante sur I , alors pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$.
- Si f est décroissante sur I , alors pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$.
- Si f est constante sur I , alors pour tout x de I , $f'(x) = 0$.

Preuve : (de la première propriété ... les deux autres se démontrent de la même façon)

B) DU SIGNE DE LA DÉRIVÉE AU SENS DE VARIATION

Théorème : admis

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I .

- Si pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .
- Si pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .
- Si pour tout x de I , $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

Remarques :

- Si la dérivée f' est strictement positive sur I , sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
- Si la dérivée f' est strictement négative sur I , sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

Exemple :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + 9$.
 f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f'(x) = f'(0) = 0$ et pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) > 0$.
Ainsi f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
On résume ces résultats dans un tableau de variation :

x	
signe de f'	
f	

On indique :

- le signe de f'
- les zéros de f'
- les valeurs de f pour les zéros de f'

On ne met jamais de valeurs approchées dans un tel tableau...

Attention : Il est fondamental de se placer sur un **intervalle**.

Exemple :

La fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Et pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, ce qui est strictement négatif sur \mathbb{R}^* .

Comme vous le savez ... f n'est pas décroissante sur \mathbb{R}^* ;

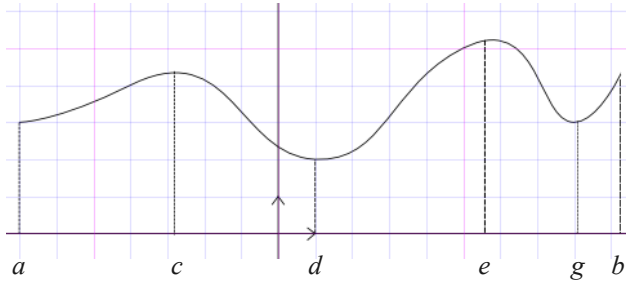
Remarques :

Pour étudier le sens de variation d'une fonction il n'est pas toujours utile de dériver. N'oubliez pas :

- **La définition**
- **les sommes de fonctions**
Exemple : Soit $f : x \mapsto x^2 + x - 2$

2) EXTREMUM D'UNE FONCTION

A.) LA NOTION D'EXTREMUM LOCAL (ou relatif)



Sur l'intervalle $[a; b]$, la fonction f représentée ci-contre admet un maximum en e et un minimum en d .
 « Autour » de c et de g , on remarque que le comportement de f n'est pas banal ...
 On constate que *localement* f admet un maximum en c et un minimum en g .

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c un réel de I distinct des extrémités.
 On dit que f admet un maximum local (respectivement un minimum local) en c si $f(c)$ est le maximum (respectivement minimum) de f restreinte à un intervalle **ouvert** contenant c .

Remarque sur les extrémités :

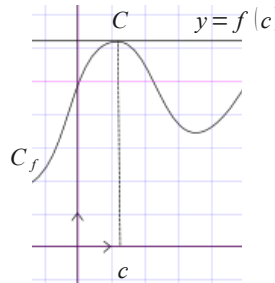
Sur un intervalle fermé $[a; b]$, on peut définir un extremum local en a ou en b .
 Par exemple, dire que $f(a)$ est un maximum local signifie que $f(a)$ est le maximum de f sur un intervalle $[a; \alpha]$, où $\alpha \leq b$.

Les fonctions que nous étudierons cette année admettront toujours un extremum en a et en b .

B.) QUEL LIEN AVEC LA DÉRIVATION ?

Théorème : admis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et c un réel de I .
 Si f admet un extremum local en c , alors $f'(c) = 0$



Conséquences graphiques:

On a $f'(c) = 0$, ainsi le coefficient directeur de la tangente à C_f en C est nul; la tangente est horizontale.

Remarques :

- Il est important que I soit ouvert .
Exemple :
- Une fonction non dérivable en un réel peut admettre un extremum en ce réel.
Exemple :
- La réciproque de ce théorème est fautive: Si $f'(c) = 0$, on n'a pas forcément un extremum en c .
Exemple :

Pour fixer les idées, on choisit les extremums éventuels de f parmi les réels c vérifiant :

- c est une borne de I ,
- c est un réel où f n'est pas dérivable ,
- c est un réel où f est dérivable et tel que $f'(c) = 0$... mais comment choisir ?

Deux configurations à retenir : *Supposons que l'on puisse extraire du tableau de variation d'une fonction une telle configuration...*

x	...	c	...
signe de f'	+	0	-
f			

x	...	c	...
signe de f'	-	0	+
f			

Propriété : admise

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I .
 Si la dérivée f' s'annule en c en **changeant de signe**, alors $f(c)$ est un extremum local de f sur I .