

# APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

## 1) DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

### A) DU SENS DE VARIATION AU SIGNE DE LA DÉRIVÉE

#### Théorème :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f$  est croissante sur  $I$ , alors pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \geq 0$ .
- Si  $f$  est décroissante sur  $I$ , alors pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \leq 0$ .
- Si  $f$  est constante sur  $I$ , alors pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) = 0$ .

**Preuve :** (de la première propriété ... les deux autres se démontrent de la même façon)

Soit  $x \in I$  et  $h \in \mathbb{R}^*$  tel que  $x+h \in I$ .

$f$  est croissante sur  $I$ ; elle conserve donc le sens des inégalités.

Ainsi les différences  $f(x+h) - f(x)$  et  $(x+h) - x$  ont le même signe.

On en déduit que le rapport  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  est toujours positif.

$f$  est dérivable en  $x$  donc  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  admet une limite finie  $f'(x)$  lorsque  $h$  tend vers 0.

Si l'on donne à  $h$  des valeurs proches de 0, alors  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  prend des valeurs positives et sa limite en 0 est donc nécessairement positive.

On a donc  $f'(x) \geq 0$ .

### B) DU SIGNE DE LA DÉRIVÉE AU SENS DE VARIATION

#### Théorème : admis

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \geq 0$ , alors  $f$  est croissante sur  $I$ .
- Si pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \leq 0$ , alors  $f$  est décroissante sur  $I$ .
- Si pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) = 0$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .

#### Remarques :

- Si la dérivée  $f'$  est strictement positive sur  $I$ , sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- Si la dérivée  $f'$  est strictement négative sur  $I$ , sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

#### Exemple :

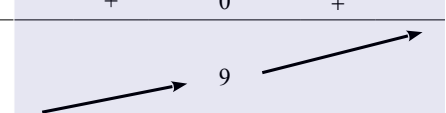
Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + 9$ .

$f$  est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 3x^2$ .

$f'(0) = 0$  et pour tout réel  $x \neq 0$ ,  $f'(x) > 0$ .

Ainsi  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

On résume ces résultats dans un tableau de variation :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f'$	+	0	+
$f$			

On indique :

- le signe de  $f'$
- les zéros de  $f'$
- les valeurs de  $f$  pour les zéros de  $f'$

On ne met jamais de valeurs approchées dans un tel tableau...

**Attention :** Il est fondamental de se placer sur un intervalle.

#### Exemple :

La fonction inverse  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$  est définie et dérivable sur  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ .

Et pour tout réel  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ , ce qui est strictement négatif sur  $\mathbb{R}^*$ .

Comme vous le savez ...  $f$  n'est pas décroissante sur  $\mathbb{R}^*$ ; elle l'est indépendamment sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ .

#### Remarques :

Pour étudier le sens de variation d'une fonction il n'est pas toujours utile de dériver. N'oubliez pas :

- **La définition**
- **les sommes de fonctions**

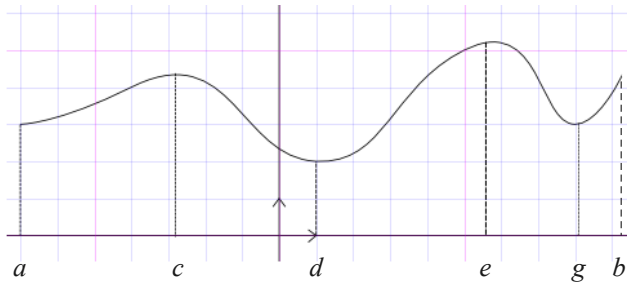
**Exemple :** Soit  $f : x \mapsto x^2 + x - 2$

On peut écrire,  $f = u + v$  où  $u : x \mapsto x^2$  et  $v : x \mapsto x - 2$ .

$u$  et  $v$  sont deux fonctions croissantes sur  $[2; +\infty[$ ; donc  $f$  est croissante sur  $[2; +\infty[$ .

## 2) EXTREMUM D'UNE FONCTION

### A) LA NOTION D'EXTREMUM LOCAL (ou relatif)



Sur l'intervalle  $[a; b]$ , la fonction  $f$  représentée ci-contre admet un maximum en  $e$  et un minimum en  $d$ .  
 « Autour » de  $c$  et de  $g$ , on remarque que le comportement de  $f$  n'est pas banal ...  
 On constate que *localement*  $f$  admet un maximum en  $c$  et un minimum en  $g$ .

#### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $c$  un réel de  $I$  distinct des extrémités.  
 On dit que  $f$  admet un maximum local (respectivement un minimum local) en  $c$  si  $f(c)$  est le maximum (respectivement minimum) de  $f$  restreinte à un intervalle **ouvert** contenant  $c$ .

#### Remarque sur les extrémités :

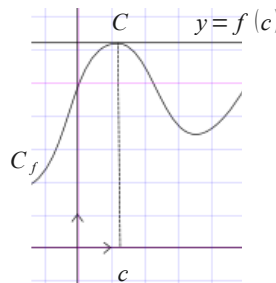
Sur un intervalle fermé  $[a; b]$ , on peut définir un extremum local en  $a$  ou en  $b$ .  
 Par exemple, dire que  $f(a)$  est un maximum local signifie que  $f(a)$  est le maximum de  $f$  sur un intervalle  $[a; \alpha[$ , où  $\alpha \leq b$ .

Les fonctions que nous étudierons cette année admettront toujours un extremum en  $a$  et en  $b$ .

### B) QUEL LIEN AVEC LA DÉRIVATION ?

#### Théorème : admis

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert**  $I$  et  $c$  un réel de  $I$ .  
 Si  $f$  admet un extremum local en  $c$ , alors  $f'(c) = 0$



#### Conséquences graphiques:

On a  $f'(c) = 0$ , ainsi le coefficient directeur de la tangente à  $C_f$  en  $C$  est nul; la tangente est horizontale.

#### Remarques :

- Il est important que  $I$  soit ouvert.  
**Exemple :**  $f : x \mapsto x^2$  et  $I = [0; 1]$ ,  $f(1) = 1$  est le maximum de  $f$  sur  $I$  et pourtant  $f'(1) = 2 \dots$
- Une fonction non dérivable en un réel peut admettre un extremum en ce réel.  
**Exemple :** Pensez à la fonction valeur absolue qui n'est pas dérivable en 0 ...
- La réciproque de ce théorème est fautive: Si  $f'(c) = 0$ , on n'a pas forcément un extremum en  $c$ .  
**Exemple :**  $f : x \mapsto x^3$ ,  $f'(0) = 0$  et pourtant  $f(0)$  n'est pas un extremum local de  $f$ , mais un point d'inflexion...

**Pour fixer les idées**, on choisit les extremums éventuels de  $f$  parmi les réels  $c$  vérifiant :

- $c$  est une borne de  $I$ ,
- $c$  est un réel où  $f$  n'est pas dérivable,
- $c$  est un réel où  $f$  est dérivable et tel que  $f'(c) = 0 \dots$  mais comment choisir ?

#### Deux configurations à retenir :

Supposons que l'on puisse extraire du tableau de variation d'une fonction une telle configuration...

$x$	...	$c$	...
signe de $f'$	+	0	-
$f$			

$x$	...	$c$	...
signe de $f'$	-	0	+
$f$			

La dérivée s'annule et change de signe ... il semble que l'on soit en présence d'un extremum local.

#### Propriété : admise

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $c$  un réel de  $I$ .  
 Si la dérivée  $f'$  s'annule en  $c$  en **changeant de signe**, alors  $f(c)$  est un extremum local de  $f$  sur  $I$ .