DÉRIVATION

1) LIMITE FINIE D'UNE FONCTION EN ZERO

A) ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{4-4(1-x)^2}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$

$f(0)$ n'existe pas, mais $f(x)$ est calculable pour toutes les valeurs de x très voisines de 0. Que deviennent les nombres $f(x)$ lorsque x prend des valeurs voisines de zéro, par exemple celles de $]-0{,}9\,;0[\cup]0\,;0{,}9[$?

Le tableau de valeurs ci-dessous, nous permet de constater que les nombres $f(x)$ s'accumulent autour de 8, lorsque x est voisin de 0 …

x	-0,9	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1	0,5	0,9
$f(x)$	11.6	10	8,4	8.04	8,004	7,996	7,96	7,6	6	4,4

Le résultat n'est, en fait, pas surprenant . En effet :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a: $f(x) = \dfrac{4-4(1-2x+x^2)}{x} = \dfrac{8x-4x^2}{x} = 8-4x$

Ainsi, lorsque x prend des valeurs de plus en plus voisines de zéro, les nombres $8-4x$ s'accumulent autour de 8.
Plus précisément, ils finissent par se trouver dans tout intervalle $I =]8-\varepsilon\,;8+\varepsilon[$, aussi petit que soit ε, $(\varepsilon > 0)$. Par exemple, si on choisit $\varepsilon = 0{,}001$, tous les nombres 8 – 4x sont dans I, lorsque $-0{,}00025 < x < 0{,}00025$.

On dit alors que 8 est la limite de f en 0 et on note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 8$

B) CAS GÉNÉRAL

Définition :

Soit f une fonction telle que zéro soit dans son ensemble de définition Df ou soit une borne de Df.
Intuitivement, dire que f a pour limite L en zéro, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de zéro, « **les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de L** ».
C'est à dire que pour tout ε, $(\varepsilon > 0)$, aussi petit qu'il soit, les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]L-\varepsilon\,;L+\varepsilon[$.

On note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = L$

C) QUELQUES RÉSULTATS A CONNAÎTRE … (admis)

Remarque importante:

On admet que si une fonction f est définie en 0 et si f admet une limite finie en 0 (on dit que f est continue en 0), alors: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.
C'est le cas, en tout point de l'ensemble de définition, des fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques, de la fonction racine carrée… et des composées de ces fonctions.

- $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
- Soit P une fonction polynôme et Q est une fonction rationnelle définie en 0, alors:
  $\lim\limits_{x\to 0} P(x) = P(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0} Q(x) = Q(0)$
- Si, de plus, P et Q sont définies et positives au voisinage de 0, alors :
  $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{P(x)} = \sqrt{P(0)}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{Q(x)} = \sqrt{Q(0)}$
- Soit f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = L'$, alors:
  $\lim\limits_{x\to 0}(f+g)(x) = L+L'$ et $\lim\limits_{x\to 0}(f\times g)(x) = L\times L'$

Exemples :

$\lim\limits_{x\to 0}(-3x^2+2x-8) = -8$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4x+2}{x^2+1}\right) = 2$; $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{4x+2}{x^2+1}} = \sqrt{2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(-3x^2+2x-8+\sqrt{\dfrac{4x+2}{x^2+1}}\right) = -8+\sqrt{2}$

2) FONCTION DÉRIVABLE – NOMBRE DÉRIVÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles deux à deux disjoints et $a \in D_f$.

Définition :

Dire que la fonction f est dérivable en a et que le nombre dérivé de f en a est le réel L, revient à dire que le taux de variation de f en a, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, admet pour limite finie L quand h tend vers 0.

Le nombre dérivé est noté $f'(a)$, et on a: $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Exemple :

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur ℝ et a un réel quelconque.

Pour $h\neq 0$, on a: $t(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}=2a+h$

Or $\lim\limits_{h\to 0}(2a+h)=2a$, donc f est dérivable en a et $f'(a)=2a$.

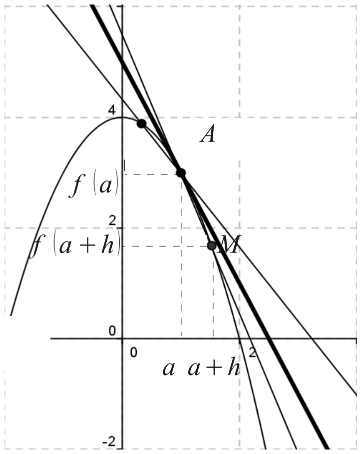
3) QUELQUES APPLICATIONS

A) TANGENTE EN UN POINT

Un peu d'intuition …

Soit M le point de C_f d'abscisse $a+h$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$



Géométriquement, la tangente à C_f au point A se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes (AM) lorsque M tend vers A en restant sur la courbe.

Si f est dérivable en a, la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur $f'(a)$, et passe par A.

Propriété :

Si f est dérivable en a, la courbe C_f admet au point $A(a\,;f(a))$ une tangente T de coefficient directeur $f'(a)$.
Une équation de la tangente en ce point est: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Preuve:

T admet une équation de la forme $y=f'(a)x+p$; de plus elle passe par $A(a\,;f(a))$ …

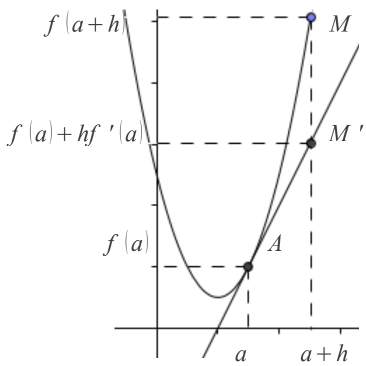
Cas particuliers importants:

- Si $f'(a)=0$, C_f admet au point d'abscisse a une tangente parallèle à l'axe des abscisses (horizontale) d'équation $y=f(a)$.
- Si $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=+\infty$ ou $-\infty$, f n'est pas dérivable en a, mais C_f admet une tangente verticale d'équation $x=a$.

B) APPROXIMATION AFFINE LOCALE (admis)

Propriété :

On dit que $f(a)+hf'(a)$ est **la meilleure approximation affine** de $f(a+h)$ au voisinage de 0 .



Remarques :

- La distance MM' mesure la valeur absolue de l'erreur commise.
- Une autre droite passant par A fournirait une autre approximation affine de $f(a+h)$, mais celle donnée par la tangente est la meilleure. *(admis ...mais intuitif)*

Exemple :

Le nombre dérivé de la fonction $f : x \longmapsto x^2$ en un réel a est $f'(a)=2a$

Au voisinage de 0, on a donc $(a+h)^2\approx a^2+2ah$

Par exemple, $(3{,}01)^2=(3+0{,}01)^2=9+2\times 3\times 0{,}01=9{,}06$

Dans ce cas il est possible de déterminer l'erreur commise : elle est de $h^2=0{,}0001$.

Quelques exemples :

Au voisinage de 0 :

$(1+h)^2\approx 1+2h$; $(1+h)^3\approx 1+3h$; $\frac{1}{1+h}\approx 1-h$; $\sqrt{1+h}\approx 1+\frac{1}{2}h$

C) UN PEU DE PHYSIQUE : INTERPRÉTATION CINÉMATIQUE DU NOMBRE DERIVÉ

Un mobile ponctuel se déplace sur un axe.
On note $d(t)$, la distance qu'il a parcourue à l'instant t . (loi horaire)

Comme vous l'avez peut-être vu en physique, la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_o est la limite des vitesses moyennes $\dfrac{d(t_0-h)-d(t_0)}{h}$ lorsque h tend vers 0.
Il s'agit du nombre dérivée en t_o de la fonction d.

Autres domaines... :

Le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ mesure en général la variation moyenne d'une grandeur sur un certain intervalle (débit moyen , coût moyen de production …).

Le nombre dérivé, lui, est une mesure instantanée (débit instantané , coût marginal …) .

4) FONCTIONS DÉRIVÉES

A) DÉFINITION

Définition :

On dit qu'une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I ($I \subset D_f$) si pour tout x appartenant à I, le nombre dérivé de f en x existe.

La fonction dérivée de f sur I est la fonction, notée f', qui, à tout x de I, associe le réel $f'(x)$.

Cette définition s'étend à une réunion d'intervalles disjoints.

Par abus de langage, on dit que f' est « la dérivée de f »

Exemple :

La fonction $f: x \longmapsto x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f': x \longmapsto 2x$.

Remarques :

On appelle **ensemble de dérivabilité** de la fonction f, l'ensemble sur lequel la fonction dérivée f' est définie.
Cet ensemble (noté $D_{f'}$) est toujours inclus dans D_f .

B) DÉRIVÉES DE QUELQUES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

	Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
1)	$f: x \longmapsto k \ (k \in \mathbb{R})$	$f': x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
2)	$f: x \longmapsto x$	$f': x \longmapsto 1$	$\mathbb{R}$
3)	$f: x \longmapsto \sqrt{x}$	$f': x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$ Cette fonction n'est pas dérivable en 0

Preuves:

On choisit toujours h , au voisinage de a et de telle sorte que $f(a+h)$ soit définie.

1) Soit $a \in \mathbb{R}$.
Pour $h \neq 0$, on a $t(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{k-k}{h}=0$, donc $\lim\limits_{h\to 0} t(h)=0$.
Donc, pour tout réel a, $f'(a)=0$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$.
Pour $h \neq 0$, on a $t(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{a+h-a}{h}=\dfrac{h}{h}=1$, donc $\lim\limits_{h\to 0} t(h)=1$.
Donc, pour tout réel a, $f'(a)=1$.

3) Si $a>0$.
Pour $h>0$, $t(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\dfrac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})\times(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h\times(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$
Donc $t(h)=\dfrac{a+h-a}{h\times(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$.
Or $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{a+h}=\sqrt{a}$, donc $\lim\limits_{h\to 0} t(h)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Si $a=0$.
Pour $h>0$, $t(h)=\dfrac{\sqrt{h}}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$, donc $\lim\limits_{h\to 0} t(h)=+\infty$, ce qui n'est pas un réel...
Donc $f: x \longmapsto \sqrt{x}$, n'est pas dérivable en 0.

5) OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

A) SOMME , PRODUIT …

D représente un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.

Propriétés :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur D et k un réel, alors:

- Les fonctions $k \cdot u$, $u+v$ et $u \cdot v$ sont dérivables sur D et:

$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \ (1), \quad (u+v)' = u' + v' \ (2) \quad \text{et} \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \ (3).$$

- Si pour tout réel a de D, $v(a) \neq 0$, les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur D et:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \ (4) \quad , \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \ (5).$$

Preuves :

1) Soit $a \in D$.

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \frac{(k \cdot u)(a+h) - (k \cdot u)(a)}{h} = \frac{k \cdot (u(a+h)) - k \cdot (u(a))}{h} = k \cdot \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$

Donc $\lim_{h \to 0} t(h) = k \cdot u'(a)$, donc $(k \cdot u)'(a) = k \cdot u'(a)$ pour tout $a \in D$.

2) Soit $a \in D$.

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$.

Donc $\lim_{h \to 0} t(h) = u'(a) + v'(a)$, donc $(u+v)'(a) = u'(a) + v'(a)$ pour tout $a \in D$.

3) Soit $a \in D$.

Pour $h \neq 0$,

$$t(h) = \frac{(u \cdot v)(a+h) - (u \cdot v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}$$

$$t(h) = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a+h) + u(a) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}$$

$$t(h) = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

Comme $\lim_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$, $\lim_{h \to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$ et $\lim_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$,

Alors $\lim_{h \to 0} t(h) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a) = (u \cdot v)'(a)$, pour tout $a \in D$.

4) Soit $a \in D$.

Pour tout $h \neq 0$,

$$t(h) = \frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = \frac{v(a) - v(a+h)}{h \times v(a) \times v(a+h)} = -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a) \times v(a+h)}$$

Or $\lim_{h \to 0} -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} = -v'(a)$ et $\lim_{h \to 0} \frac{1}{v(a) \times v(a+h)} = \frac{1}{v(a)^2}$.

Donc $\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = \lim_{h \to 0} t(h) = -\frac{v'(a)}{v(a)^2}$, pour tout $a \in D$.

5) Puisque $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$, il suffit de se rapprocher des preuves 3) et 4)...

B) CONSÉQUENCES : de nouvelles formules à retenir

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f : x \longmapsto x^2$	$f' : x \longmapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto x^3$	$f' : x \longmapsto 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \longmapsto n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$	$f' : x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f : x \longmapsto \frac{1}{x^2}$	$f' : x \longmapsto -\frac{2}{x^3}$	$\mathbb{R}^*$
$f : x \longmapsto \frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \longmapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

Remarque :

Pour $x \neq 0$, on a $\frac{1}{x^n} = x^{-n} = x^m$, alors $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^m)' = mx^{m-1} = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$

Ainsi la formule de la dérivée de $f : x \to x^n$ est vraie pour tout entier relatif n, en n'oubliant pas la condition $x \neq 0$ si $n < 0$.

C) POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

Propriétés :

- Toute fonction polynôme est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Exemple:

Soit P le polynôme définit sur $\mathbb{R}$ par $P : x \longmapsto 3x^3 + 5x^2 - x + 3$

P est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc P est dérivable et pour tout réel x :

$P'(x) = 3 \times 3x^2 + 5 \times 2x - 1 = 9x^2 + 10x - 1$.

Remarque: Si P est un polynôme de degré $n > 0$, alors P' est un polynôme de degré $n - 1$.

Exemple:

Soit f la fonction rationnelle définit par $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2+1}{x-1}$

On peut écrire $f = \dfrac{u}{v}$ où $u(x) = 2x^2 + 1$ et $v(x) = x - 1$

On a $v(x) = 0$ pour $x = 1$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et pour tout $x \neq 1$, on a:

$f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, donc $f'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{v(x)^2}$ avec $u'(x) = 2 \times 2x = 4x$ et $v'(x) = 1$

Donc $f'(x) = \dfrac{4x(x-1) - 1 \times (2x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}$.