

DÉRIVATION

1) LIMITE FINIE D'UNE FONCTION EN ZÉRO

A) ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto \frac{4-4(1-x)^2}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$

$f(0)$ n'existe pas, mais $f(x)$ est calculable pour toutes les valeurs de x très voisines de 0. Que deviennent les nombres $f(x)$ lorsque x prend des valeurs voisines de zéro, par exemple celles de $] -0,9 ; 0[\cup] 0 ; 0,9[$?

Le tableau de valeurs ci-dessous, nous permet de constater que les nombres $f(x)$ s'accroissent autour de 8, lorsque x est voisin de 0 ...

x	-0,9	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1	0,5	0,9
$f(x)$	11,6	10	8,4	8,04	8,004	7,996	7,96	7,6	6	4,4

Le résultat n'est, en fait, pas surprenant. En effet :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = \frac{4-4(1-2x+x^2)}{x} = \frac{8x-4x^2}{x} = 8-4x$

Ainsi, lorsque x prend des valeurs de plus en plus voisines de zéro, les nombres $8-4x$ s'accroissent autour de 8.

Plus précisément, ils finissent par se trouver dans tout intervalle $I =]8-\varepsilon ; 8+\varepsilon[$, aussi petit que soit ε , ($\varepsilon > 0$). Par exemple, si on choisit $\varepsilon = 0,001$, tous les nombres $8-4x$ sont dans I , lorsque $-0,00025 < x < 0,00025$.

On dit alors que 8 est la limite de f en 0 et on note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 8$

B) CAS GÉNÉRAL

Définition :

Soit f une fonction telle que zéro soit dans son ensemble de définition D_f ou soit une borne de D_f .

Intuitivement, dire que f a pour limite L en zéro, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de zéro, « les nombres $f(x)$ correspondent viennent s'accumuler autour de L ».

C'est à dire que pour tout ε , ($\varepsilon > 0$), aussi petit qu'il soit, les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]L-\varepsilon ; L+\varepsilon[$.

On note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$

C) QUELQUES RÉSULTATS A CONNAÎTRE ... (admis)

Remarque importante:

On admet que si une fonction f est définie en 0 et si f admet une limite finie en 0 (on dit que f est continue en 0), alors: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

C'est le cas, en tout point de l'ensemble de définition, des fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques, de la fonction racine carrée... et des composées de ces fonctions.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
- Soit P une fonction polynôme et Q est une fonction rationnelle définie en 0, alors:
 $\lim_{x \rightarrow 0} P(x) = P(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} Q(x) = Q(0)$
- Si, de plus, P et Q sont définies et positives au voisinage de 0, alors :
 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{P(x)} = \sqrt{P(0)}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{Q(x)} = \sqrt{Q(0)}$
- Soit f et g deux fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = L'$, alors:
 $\lim_{x \rightarrow 0} (f+g)(x) = L+L'$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (f \times g)(x) = L \times L'$

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-3x^2 + 2x - 8) = -8 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x+2}{x^2+1} \right) = 2 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{4x+2}{x^2+1}} = \sqrt{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(-3x^2 + 2x - 8 + \sqrt{\frac{4x+2}{x^2+1}} \right) = -8 + \sqrt{2}$$

2) FONCTION DÉRIVABLE – NOMBRE DÉRIVÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles deux à deux disjoints et $a \in D_f$.

Définition :

Dire que la fonction f est dérivable en a et que le nombre dérivé de f en a est le réel L , revient à dire que le taux de variation de f en a , $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, admet pour limite finie L quand h tend vers 0.

Le nombre dérivé est noté $f'(a)$, et on a : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Exemple :

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur \mathbb{R} et a un réel quelconque.

Pour $h \neq 0$, on a : $t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$

Or $\lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a$, donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

3) QUELQUES APPLICATIONS

A) TANGENTE EN UN POINT

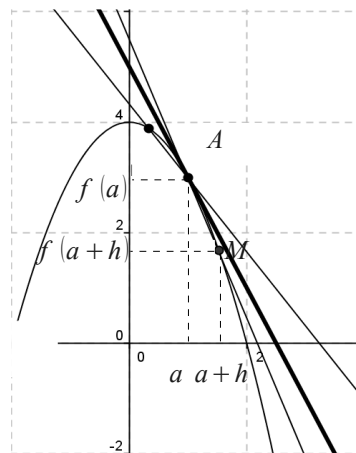
Un peu d'intuition ...

Soit M le point de C_f d'abscisse $a+h$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Géométriquement, la tangente à C_f au point A se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes (AM) lorsque M tend vers A en restant sur la courbe.

Si f est dérivable en a , la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur $f'(a)$, et passe par A .



Propriété :

Si f est dérivable en a , la courbe C_f admet au point $A(a; f(a))$ une tangente T de coefficient directeur $f'(a)$.

Une équation de la tangente en ce point est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Preuve :

T admet une équation de la forme $y = f'(a)x + p$; de plus elle passe par $A(a; f(a))$...

Cas particuliers importants :

- Si $f'(a) = 0$, C_f admet au point d'abscisse a une tangente parallèle à l'axe des abscisses (horizontale) d'équation $y = f(a)$.
- Si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty$ ou $-\infty$, f n'est pas dérivable en a , mais C_f admet une tangente verticale d'équation $x = a$.

B) APPROXIMATION AFFINE LOCALE (admis)

Propriété :

On dit que $f(a) + hf'(a)$ est la **meilleure approximation affine** de $f(a+h)$ au voisinage de 0.

Remarques :

- La distance MM' mesure la valeur absolue de l'erreur commise.
- Une autre droite passant par A fournirait une autre approximation affine de $f(a+h)$, mais celle donnée par la tangente est la meilleure. (*admis ... mais intuitif*)

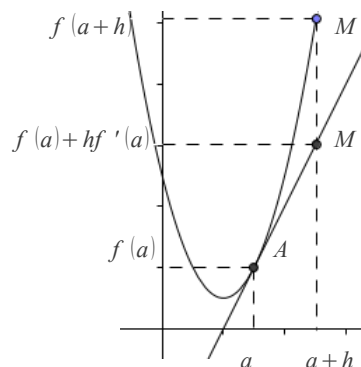
Exemple :

Le nombre dérivé de la fonction $f : x \mapsto x^2$ en un réel a est $f'(a) = 2a$

Au voisinage de 0, on a donc $(a+h)^2 \approx a^2 + 2ah$

Par exemple, $3,01^2 = (3 + 0,01)^2 \approx 9 + 2 \times 3 \times 0,01$ donc $3,01^2 \approx 9,06$

Dans ce cas il est possible de déterminer l'erreur commise : elle est de $h^2 = 0,0001$.



Quelques exemples :

Au voisinage de 0 :

$$(1+h)^2 \approx 1+2h \quad ; \quad (1+h)^3 \approx 1+3h \quad ; \quad \frac{1}{1+h} \approx 1-h \quad ; \quad \sqrt{1+h} \approx 1+\frac{1}{2}h$$

C) UN PEU DE PHYSIQUE : INTERPRÉTATION CINÉMATIQUE DU NOMBRE DÉRIVÉ

Un mobile ponctuel se déplace sur un axe.

On note $d(t)$, la distance qu'il a parcourue à l'instant t . (loi horaire)

Comme vous l'avez peut-être vu en physique, la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0 est la limite des vitesses moyennes $\frac{d(t_0+h) - d(t_0)}{h}$

lorsque h tend vers 0.

Il s'agit du nombre dérivé en t_0 de la fonction d .

Autres domaines... :

Le taux de variation $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ mesure en général la variation moyenne d'une grandeur sur un certain intervalle (débit moyen, coût moyen de production...).

Le nombre dérivé, lui, est une mesure instantanée (débit instantané, coût marginal...).

4) FONCTIONS DÉRIVÉES

A) DÉFINITION

Définition :

On dit qu'une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I ($I \subset D_f$) si pour tout x appartenant à I , le nombre dérivé de f en x existe.

La fonction dérivée de f sur I est la fonction, notée f' , qui, à tout x de I , associe le réel $f'(x)$.

Cette définition s'étend à une réunion d'intervalles disjoints.

Par abus de langage, on dit que f' est « la dérivée de f »

Exemple :

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto 2x$.

Remarques :

On appelle **ensemble de dérivabilité** de la fonction f , l'ensemble sur lequel la fonction dérivée f' est définie.

Cet ensemble (noté $D_{f'}$) est toujours inclus dans D_f .

B) DÉRIVÉES DE QUELQUES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

	Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
1)	$f : x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$f' : x \mapsto 0$	\mathbb{R}
2)	$f : x \mapsto x$	$f' : x \mapsto 1$	\mathbb{R}
3)	$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$ Cette fonction n'est pas dérivable en 0

Preuves:

On choisit toujours h , au voisinage de a et de telle sorte que $f(a+h)$ soit définie.

1) Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour $h \neq 0$, on a $t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{k - k}{h} = 0$, donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = 0$.

Donc, pour tout réel a , $f'(a) = 0$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour $h \neq 0$, on a $t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{a+h-a}{h} = \frac{h}{h} = 1$, donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = 1$.

Donc, pour tout réel a , $f'(a) = 1$.

3) Si $a > 0$.

Pour $h > 0$, $t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$

Donc $t(h) = \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$.

Or $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{a+h} = \sqrt{a}$, donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Si $a = 0$.

Pour $h > 0$, $t(h) = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$, donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = +\infty$, ce qui n'est pas un réel...

Donc $f : x \mapsto \sqrt{x}$, n'est pas dérivable en 0.

5) OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

A) SOMME, PRODUIT ...

D représente un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.

Propriétés :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur D et k un réel, alors:

- Les fonctions $k \cdot u$, $u + v$ et $u \cdot v$ sont dérivables sur D et:

$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \quad (1), \quad (u + v)' = u' + v' \quad (2) \quad \text{et} \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad (3).$$

- Si pour tout réel a de D , $v(a) \neq 0$, les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur D et:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (4), \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \quad (5).$$

Preuves :

1) Soit $a \in D$.

$$\text{Pour } h \neq 0, \quad t(h) = \frac{(k \cdot u)(a+h) - (k \cdot u)(a)}{h} = \frac{k \cdot (u(a+h)) - k \cdot (u(a))}{h} = k \cdot \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = k \cdot u'(a)$, donc $(k \cdot u)'(a) = k \cdot u'(a)$ pour tout $a \in D$.

2) Soit $a \in D$.

$$\text{Pour } h \neq 0, \quad t(h) = \frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = u'(a) + v'(a)$, donc $(u+v)'(a) = u'(a) + v'(a)$ pour tout $a \in D$.

3) Soit $a \in D$.

$$\begin{aligned} \text{Pour } h \neq 0, \quad t(h) &= \frac{(u \cdot v)(a+h) - (u \cdot v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h} \\ t(h) &= \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a+h) + u(a) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h} \\ t(h) &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} v(a+h) = v(a)$,

Alors $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a) = (u \cdot v)'(a)$, pour tout $a \in D$.

4) Soit $a \in D$.

$$\text{Pour tout } h \neq 0, \quad t(h) = \frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = \frac{v(a) - v(a+h)}{h \times v(a) \times v(a+h)} = -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a) \times v(a+h)}$$

Or $\lim_{h \rightarrow 0} -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} = -v'(a)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(a) \times v(a+h)} = \frac{1}{v(a)^2}$.

Donc $\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} t(h) = -\frac{v'(a)}{v(a)^2}$, pour tout $a \in D$.

5) Puisque $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$, il suffit de se rapprocher des preuves 3) et 4)...

B) CONSÉQUENCES : de nouvelles formules à retenir

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f : x \mapsto x^2$	$f' : x \mapsto 2x$	\mathbb{R}
$f : x \mapsto x^3$	$f' : x \mapsto 3x^2$	\mathbb{R}
$f : x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \mapsto n x^{n-1}$	\mathbb{R}
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
$f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$f' : x \mapsto -\frac{2}{x^3}$	\mathbb{R}^*
$f : x \mapsto \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^*

Remarque :

Pour $x \neq 0$, on a $\frac{1}{x^n} = x^{-n} = x^m$, alors $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^m)' = mx^{m-1} = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$

Ainsi la formule de la dérivée de $f : x \rightarrow x^n$ est vraie pour tout entier relatif n , en n'oubliant pas la condition $x \neq 0$ si $n < 0$.

C.) POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

Propriétés :

- Toute fonction polynôme est une somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , donc est dérivable sur \mathbb{R} .
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Exemple :

Soit P le polynôme défini sur \mathbb{R} par $P : x \mapsto 3x^3 + 5x^2 - x + 3$

P est une somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , donc P est dérivable et pour tout réel x :

$$P'(x) = 3 \times 3x^2 + 5 \times 2x - 1 = 9x^2 + 10x - 1.$$

Remarque : Si P est un polynôme de degré $n > 0$, alors P' est un polynôme de degré $n - 1$.

Exemple :

Soit f la fonction rationnelle définie par $f : x \mapsto \frac{2x^2 + 1}{x - 1}$

On peut écrire $f = \frac{u}{v}$ où $u(x) = 2x^2 + 1$ et $v(x) = x - 1$

On a $v(x) = 0$ pour $x = 1$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

u et v sont dérivables sur \mathbb{R} donc sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et pour tout $x \neq 1$, on a :

$$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ donc } f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{v(x)^2} \text{ avec } u'(x) = 2 \times 2x = 4x \text{ et } v'(x) = 1$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{4x(x-1) - 1 \times (2x^2 + 1)}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}.$$