Nombre dérivé d'une fonction en « un point »

Ex 1 : ***Vrai ou faux : restituer les notions du cours***

1) Pour savoir si une fonction est dérivable en un « point » a , on regarde la limite de $\dfrac{f(a)-f(a+h)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

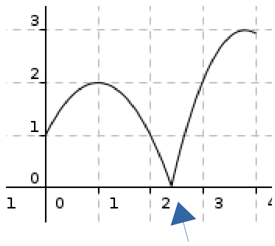
2) Il est possible qu'une fonction ne soit pas dérivable en un point a .

3) Si une fonction f est dérivable en a , la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

4) Si une fonction f est dérivable en a , le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est égal à la limite d'un taux d'accroissement de f .

Ex 2 : ***QCM : restituer les notions du cours***

Soit f la fonction définie sur [0;4] représentée ci-dessous :



2,4

1) Au point d'abscisse 1 :
a) f n'est pas dérivable
b) f est dérivable et $f'(1)=0$
c) f est dérivable et $f'(1)=2$

2) Au point d'abscisse 2,4 :
a) f n'est pas dérivable
b) f est dérivable et $f'(2,4)=-1$
c) f est dérivable et $f'(2,4)=1$

3) Au point d'abscisse 0 :
a) f n'est pas dérivable
b) f est dérivable et $f'(0)\approx 2$
c) f est dérivable et $f'(0)\approx 1$

Ex 3 : ***Calculer le nombre dérivé***

Déterminer si le nombre dérivé de la fonction f en a existe et, si c'est le cas, calculer $f'(a)$.

1) $f:x\longmapsto x\sqrt{x}$, $a=0$ 2) $f:x\longmapsto |x-3|$, $a=3$

3) $f:x\longmapsto x^2+x+1$, $a=-1$ 4) $f:x\longmapsto x^2\sqrt{x}$, $a=0$

5) $f:x\longmapsto |x-5|$, $a=3$

Ex 4 : ***Exprimer $f'(a)$ en fonction de a***

Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f . Déterminer alors, pour tout réel $a\in D_f$, si le nombre dérivé de f en a existe et, si c'est le cas, exprimer $f'(a)$ en fonction de a .

a) $f(x)=3x-2$ b) $f(x)=\dfrac{3}{2x-1}$ c) $f(x)=3\sqrt{x}$

Ex 5 : ***Déterminer l'équation d'une tangente***

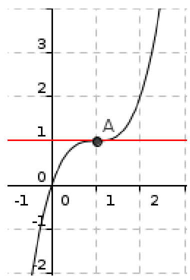
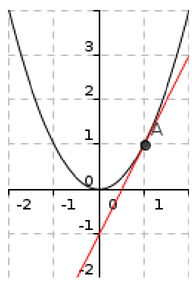
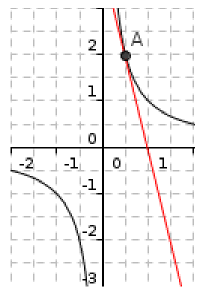
Déterminer si la fonction f est dérivable en a et, si c'est le cas, déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a .
Tracer alors sur la calculatrice la courbe et la tangente.

1) $f:x\longmapsto |x+1|$, $a=-3$ 2) $f:x\longmapsto \sqrt{x-2}$, $a=2$

3) $f:x\longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$, $a=3$ 4) $f:x\longmapsto x^2+2x+2$, $a=1$

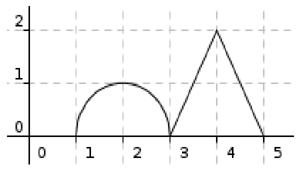
Ex 6 : ***Déterminer $f'(a)$ à l'aide d'un graphique.***

Dans chacun des cas ci-dessous, on considère la courbe représentative C_f d'une fonction f , et A un point de C_f d'abscisse A .
Déterminer $f'(a)$.

1)	2)	3)
		

Ex 7 : ***Déterminer l'équation d'une tangente à l'aide d'un graphique.***

Soit f la fonction définie sur [1;5] dont la courbe représentative est donnée ci-contre :
Déterminer si f est dérivable en a .



Si tel est le cas, déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

1) $a=1$ 2) $a=2$ 3) $a=3$ 4) $a=4$ 5) $a=5$

Ex 8 : ***Algorithme*** (consulter derivation_python8)

1) Écrire un programme qui renvoie les valeurs du taux d'accroissement d'une fonction $f:x\longmapsto ax^2+bx+c$ entre x_0 et x_0+h où h prend successivement les valeurs 10^{-p} où p est un entier qui varie de 0 à 10.

2) Tester cet algorithme avec les deux exemples ci-dessous :

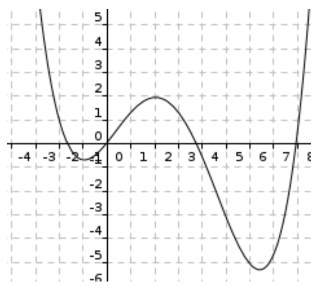
a) $f:x\longmapsto 2x^2-5x+4$, $x_0=3$

b) $f:x\longmapsto -x^2-2x+2$, $x_0=1$

Dans chaque cas, conjecturer grâce à l'algorithme la valeur de $f'(x_0)$, puis retrouver ce résultat par le calcul.

Ex 9 : ***Signe du nombre dérivé***

La courbe représentative d'une fonction dérivable a été tracée ci-dessous .



Déterminer graphiquement le signe (ou l'éventuelle nullité) des réels suivants :

a) $f'(-3)$ b) $f'(1)$ c) $f'\left(\dfrac{4}{5}\right)$

d) $f'(2)$ e) $f'(5)$ f) $f'\left(\dfrac{50}{7}\right)$

Ex 10 : ***Tracer une courbe possible***

Dans chacun des cas suivants, tracer une courbe représentative possible d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;3]$ et vérifiant la (ou les) conditions(s) proposée(s).

1) f est dérivable en 2 et $f'(2)=1$

2) f n'est pas dérivable en -1.

3) f est dérivable en -2 et en 2 et on a $f'(-2)=f'(2)=0$.

4) f est dérivable en 0 et on a $f'(0)=1$. f n'est pas dérivable en -1 et en 2.

5) f est dérivable en -3 et en 3 , $f'(-3)=1$, $f(3)=0$ et f est croissante sur $[0;3]$.

Règles de dérivation

Ex 11 : ***Vrai ou faux : restituer les notions du cours***

1) Si f est définie sur un intervalle I, alors elle est dérivable sur I.

2) La fonction $f:x \longmapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \longmapsto x^2$

3) Un fonction affine a pour dérivée une fonction constante.

4) La dérivée d'une somme de deux fonctions dérivables sur un intervalle I u et v est la somme des dérivées u' et v' .

5) La dérivée d'un produit de deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I est le produit des dérivées u' et v' .

6) Pour que la fonction $\dfrac{1}{u}$ soit dérivable en a , il suffit que u ne s'annule pas en a .

Ex 12 : ***Calculs de dérivées***

Dans chacun des cas, calculer la dérivée, en indiquant sur quel ensemble vos calculs sont valables.

a) $f:x \longmapsto (x-2)\times(x-4)$

b) $f:x \longmapsto \dfrac{x}{x^2-1}$

c) $f:x \longmapsto \dfrac{x-2}{\sqrt{x}}$

d) $f:x \longmapsto (x^2-1)\sqrt{x}$

e) $f:x \longmapsto 3x^3-2x^2+2x+5$

f) $f:x \longmapsto \left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2$

g) $f:x \longmapsto (x-3)(x^4+1)$

h) $f:x \longmapsto x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$

Ex 13 : ***Opérations sur les fonctions dérivables***

Soit la fonction $u:x \longmapsto x^2-x$

1) Déterminer sur quel ensemble la fonction u est dérivable, puis calculer sa dérivée.

2) En déduire sur quel ensemble les fonctions suivantes sont dérivables, puis calculer leur dérivée:

a) $5u$ b) u^2 c) u^3 d) $u\times(u-3)$ e) $\dfrac{1}{u}$ f) $\dfrac{1}{1+u}$ g) $\dfrac{u}{1+u}$

Ex 14 : ***Calculs de dérivées avec un logiciel de calcul formel***

Dans chacun des cas, calculer la dérivée avec un logiciel de calcul formel (Xcas ou Maxima ou une calculatrice de type CAS …) , en indiquant sur quel ensemble les calculs sont valables.

a) $f:x \longmapsto (x^{15}-x)(x^{37}-x^2)$

b) $f:x \longmapsto 18x^{11}-\dfrac{1}{17x^{19}}$

c) $f:x \longmapsto \sqrt{x}(x^4-x^3-2x)$

d) $f:x \longmapsto \dfrac{2-\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$

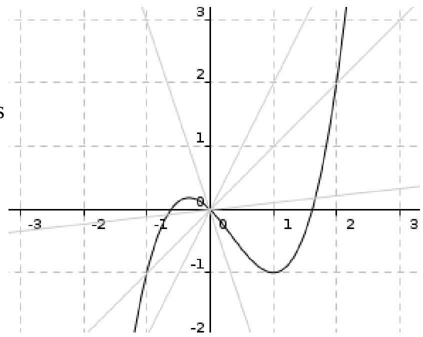
Ex 15 : ***Tangente parallèle à une droite donnée***

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2-x$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer la fonction dérivée de f .

2) Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer lorsqu'elles existent, toutes les tangentes à C_f parallèles à la droite proposée . Lorsqu'elles existent, préciser l'équation de ces tangentes, puis tracer les sur le graphique ci-contre.



a) $d_1:y=0$ b) $d_2:y=x$ c) $d_3:y=2x$ d) $d_4:y=-3x$ e) $d_5:y=\dfrac{1}{9}x$

Ex 16 : ***Retrouver une fonction de dérivée connue - primitives***

Dans chaque cas, on connaît la fonction dérivée f' d'une fonction, mais pas la fonction f . Retrouver une fonction f qui convient, et préciser sur quel ensemble la réponse proposée est valable . Est-ce possible de trouver plusieurs expressions de f lorsque f' est donnée ?

a) $f'(x)=5$ b) $f'(x)=3x+2$ c) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f'(x)=10x^9$ e) $f'(x)=3x-\dfrac{1}{x^2}$

Ex 17 : ***Même dérivée***

1) Dans chacun des cas ci-dessous, vérifier que les fonctions f et g ont la même fonction dérivée, puis exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

a) $f(x)=2+\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=\dfrac{x+1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

b) $f(x)=x^4-4+\dfrac{x^4}{x-1}$ et $g(x)=\dfrac{x^5-5x+5}{x-1}$ sur $\mathbb{R}$ -{1}

2) Que peut-on conjecturer ?

Ex 18 : ***Dérivées successives***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Lorsque la fonction f' est elle-même dérivable sur I, on dit que la fonction dérivée de f' est la dérivée seconde de f , et on note f'' .

1) Dans chacun des cas ci-dessous, démontrer que la fonction proposée est dérivable sur I, et calculer sa dérivée . Étudier alors si la fonction dérivée admet une dérivée seconde sur I, et si c'est le cas, calculer cette dérivée seconde.

a) $f : x \longmapsto x^4 - 3x^3 + 2$ sur $\mathbb{R}$ b) $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

c) $h(x) = \sqrt{x}$ sur $[1;3]$

2) Lorsque c'est possible, on peut continuer la dérivation . On obtient alors les dérivées successives de la fonction f : dérivée troisième $f^{(3)}$, dérivée quatrième $f^{(4)}$ …

Calculer, lorsque c'est possible, les dérivées troisième et quatrième des fonctions vues précédemment.

Ex 19 : ***Logique***

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

1) Rappeler la propriété du cours permettant de parler de la dérivabilité de la fonction $f \times g$ sur un intervalle J contenu dans I.

2) Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Rappeler les ensembles de dérivabilité et les fonctions dérivées de f et g .

Démonter que la fonction $f \times g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

3) Comment pourrait-on exprimer les résultats des deux questions précédentes en termes de condition nécessaire et suffisante ?

Ex 20 : ***défi - GéoGebra***

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite $d : y = x$.

Déterminer l'ensemble des paraboles admettant d pour tangente au point d'abscisse 1, et démontrer que l'ensemble des sommets de ces paraboles varie sur un ensemble que l'on déterminera.

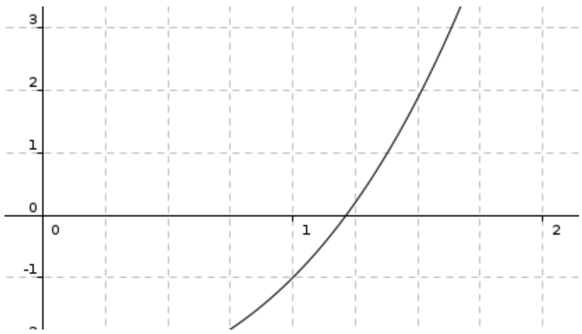
Vérifier avec GeoGebra.

Ex 21 : ***Algorithme - Méthode de Newton-Raphson***

(consulter derivation_python21_1 et derivation_python21_2)

1) **Introduction :**

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 3$ et sa courbe représentative C_f représentée ci-dessous.



On constate que C_f coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α dont nous allons déterminer une valeur approchée.

a) Tracer la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse $x_0 = \dfrac{3}{2}$.

T_{x_0} coupe l'axe des abscisses en un unique point A .

Déterminer l'abscisse x_1 de A .

b) Tracer la tangente T_{x_1} à C_f au point d'abscisse x_1 . T_{x_1} coupe l'axe des abscisses en un unique point B d'abscisse x_2 . Que dire de x_2 ?

2) **Mise en place de l'algorithme :**

Revenons sur le cas général . Soit f une fonction dont la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(x) = 0$ admette une unique solution α . On note C_f sa courbe représentative . Soit x_0 un réel supérieur à α .

a) Déterminer l'équation de la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse x_0 .

b) Démontrer que l'abscisse x_1 du point d'intersection A_1 de T_{x_0} avec l'axe des abscisses vaut $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. On peut alors répéter ce procédé en remplaçant x_0 par la nouvelle abscisse x_1 , et ainsi obtenir des réels x_1 , x_2 , x_3 … de plus en plus proche de α .

c) On s'intéresse à nouveau à la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 3$.
Compléter les pointillés dans l'algorithme suivant pour qu'il affiche les valeurs x_1 , … , x_{10} . (A faire pour un polynôme de degré 3 quelconque)

```
lire a,b,c,d,x
pour i allant de 1 à ......

    x ← .......

fin pour
afficher x
```

Remarque :
Essayer aussi d'écrire un algorithme en définissant une fonction et la fonction dérivée de la fonction définie :

```
définir f(a,b,c,d,x)
  retourner a*x^3+b*x^2+c*x+d
fin définir

définir deri_f(.......        )
  retourner ...............................
fin définir
```

d) On se propose maintenant de trouver un réel x tel que $|f(x)| < 10^{-p}$ et en insérant un compteur .
Pour cela, compléter les pointillés dans l'algorithme ci-dessous :

```
lire a,b,c,d,x,p

compteur=.......

tant que ......

    x ← .......

    compteur← .......

fin tant que
afficher x
```

Tester cet algorithme avec p=10

Combien d'étapes sont nécessaires.

3) **Application :**

Étudier la fonction $g : x \longmapsto x^3 - x^2 + 2x$, vérifier que sa fonction dérivée est strictement positive, puis que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

En utilisant le second algorithme, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.