

SUITES ARITHMÉTIQUES et SUITES GÉOMÉTRIQUES

1) SUITES ARITHMÉTIQUES

A) DÉFINITION PAR RÉCURRENCE

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique**, s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé **raison** de la suite (u_n) .

r peut-être positif ou négatif.

Exemples :

- La suite des entiers naturels est une suite arithmétique de raison 1.
- La suite des entiers naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2.
- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 4n + 4$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 4 - (4n + 4) = 4$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n + 4$ et (u_n) est une suite arithmétique de raison 4.

L'astuce :
calculer $u_{n+1} - u_n$

Plus généralement, on montre de la même façon, que toute suite (u_n) définie par $u_n = an + b$ (où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) est une suite arithmétique de raison a et de premier terme b .

Et la réciproque !!!

B) DÉFINITION PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .
Alors, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 + nr$

Preuve :

Additionnons membre à membre les n égalités ci-contre:

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ \dots \\ u_{n-1} = u_{n-2} + r \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases}$$

On obtient : $u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + nr$

Et après simplification : $u_n = u_0 + nr$

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique définie par $u_0 = 7$ et $r = 12$, alors $u_6 = 7 + 6 \times 12 = 79 \dots$

Plus généralement :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .
Pour tous entiers naturels p et q , on a : $u_p = u_q + (p - q)r$

Preuve : (Pour la preuve, on suppose que le premier terme de la suite est u_0)

On a $u_p = u_0 + pr$ et $u_q = u_0 + qr$, donc $u_p - u_q = pr - qr$ et $u_p = u_q + (p - q)r$

Intérêts :

- Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite arithmétique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)
- Cette formule permet aussi de calculer la raison d'une suite arithmétique dont on connaît deux termes.

Exemples :

- Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 4$ et $u_4 = 10$.
On a $u_4 = u_2 + (4 - 2)r$, donc $r = \dots = 3$
- Soit (u_n) une suite arithmétique définie par $u_{10} = 30$ et $r = 2$.
On a $u_{20} = u_{10} + (20 - 10)2 = 50$

C) MONOTONIE

Les résultats suivants ne sont pas surprenants :

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.

D) SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Remarque préliminaire :

NOMBRE DE TERMES D'UNE SOMME

$u_1 + u_2$ est une somme de deux termes ; $u_1 + u_2 + u_3$ est une somme de trois termes

De manière générale, $u_1 + u_2 + \dots + u_p$ est une somme de p termes .

Comment faire (sans compter sur les doigts) pour calculer le nombre de termes de la somme $u_{12} + u_{13} + \dots + u_{56}$?

On peut écrire $u_{12} + u_{13} + \dots + u_{56} = u_{1+11} + u_{2+11} + \dots + u_{45+11}$

La somme a donc 45 termes, c'est à dire $56 - 12 + 1$

Plus généralement :

Le nombre de termes de la somme $u_p + u_{p+1} + \dots + u_q$ (p, q entiers naturels tels que $p \leq q$) est $q - p + 1$

Étude d'un exemple fondamental : SOMME DES n PREMIERS ENTIERS NATURELS

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = n$.

Calculons la somme $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 + 2 + \dots + n$.

On peut écrire :
$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

En additionnant membre à membre, on obtient :

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ fois}} \quad \text{c'est à dire} \quad 2S = n(n+1) \quad \text{et donc} \quad S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cas général :

En utilisant la même idée,

$$S = a + (a+r) + (a+2r) + \dots + b$$
$$S = b + (b-r) + (b-2r) + \dots + a$$

a et b sont les termes extrêmes de S , r est la raison de la suite

Propriété :

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la demi-somme des termes extrêmes .

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exemples :

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

On a $S = u_7 + u_8 + \dots + u_{15} = 9 \times \frac{u_7 + u_{15}}{2}$

- Soit (v_n) la suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $v_0 = 15$.

On a $v_8 = v_0 + 4 \times 8 = 15 + 32 = 47$

On en déduit que $v_0 + v_1 + \dots + v_8 = 9 \times \frac{v_0 + v_8}{2} = 9 \times \frac{15 + 47}{2} = 279$

Remarques : Moyenne arithmétique

- Si a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors $b = \frac{a+c}{2}$
- De manière plus générale, si $u_p, u_{p+1}, \dots, u_{p+n}$ sont $n+1$ termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors la moyenne arithmétique de ces termes est la moyenne arithmétique des termes extrêmes : $\frac{u_p + u_{p+n}}{2}$

2) SUITES GÉOMÉTRIQUES

A) DÉFINITION PAR RÉCURRENCE

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique**, s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1} = qu_n$.

Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n) .

q peut-être positif ou négatif et non nul (sans intérêt)

Exemples :

- Soit (u_n) , la suite des puissances de 2, définie par $u_n = 2^n$

Pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2 u_n$

Cette suite est donc une suite géométrique de raison 2 .

- Soit (v_n) la suite définie par $v_n = n \times 5^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 5 \times \frac{n+1}{n}$, ce qui n'est pas un rapport constant.

La suite (v_n) n'est donc pas une suite géométrique.

- Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par $w_n = 4 \times 3^n$
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_{n+1} = 4 \times 3^{n+1} = 3 \times (4 \times 3^n) = 3 \times w_n$
 Cette suite est donc une suite géométrique de raison 3.

Plus généralement, on montre de la même façon, que toute suite (u_n) définie par $u_n = aq^n$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}^*$) est une suite géométrique de raison q et de premier terme a .

Et la réciproque !!!

B) DÉFINITION PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .
 Alors, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 q^n$

Preuve :

(u_n) est une suite géométrique, donc $u_1 = u_0 q$. Puis $u_2 = u_1 q = (u_0 q) q = u_0 q^2$
 Et ainsi de proche en proche, car lorsqu'on aura établi que pour l'entier naturel p , $u_p = u_0 q^p$, on en déduira que $u_{p+1} = u_0 q^{p+1}$.
 En effet $u_{p+1} = u_p q = u_0 q^p q = u_0 q^{p+1}$

Exemple : Soit u_n la suite géométrique définie par $u_0 = 7$ et $r = 12$, alors $u_3 = 7 \times 12^3 = 12096$

Plus généralement :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q . Pour tout entier naturel m et n , on a $u_m = u_n \times q^{m-n}$

Preuve : (Pour la preuve, on suppose que le premier terme de la suite est u_0)

On a $u_m = u_0 \times q^m$ et $u_n = u_0 \times q^n$

$q \neq 0$, donc $\frac{u_m}{u_n} = \frac{q^m}{q^n} = q^{m-n}$ et $u_m = u_n \times q^{m-n}$

Intérêt : Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite géométrique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)

Exemples :

- Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_{10} = 30$ et $q = 2$.
 On a $u_{13} = u_{10} \times 2^{13-10} = 30 \times 2^3 = 30 \times 8 = 240$
- Soit (v_n) une suite géométrique telle que $v_2 = 5$ et $v_8 = 320$.
 On a $v_8 = v_2 \times q^{8-2}$, donc $320 = 5 \times q^6$ c'est à dire $q^6 = 64$
 Il y a donc deux valeurs possibles $q = 2$ ou $q = -2$

Attention : Cette formule ne permet pas de calculer la raison d'une suite géométrique dont on connaît deux termes .

Remarque : Moyenne géométrique

Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors $b^2 = ac$.

Si trois nombres positifs a , b et c vérifient $b^2 = ac$, on dit que b est la moyenne géométrique de a et c .

C) MONOTONIE

Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q (strictement positive) et de terme initial u_0 .

- Si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
 Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
 Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

Si $q < 0$ la suite est alternativement positive puis négative ...

Idée de preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$

Ainsi $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times (q^{n+1} - q^n) = q^n \times u_0 \times (q - 1)$

$q > 0$; on en déduit que le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le signe de $u_0 \times (q - 1)$...

D) SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Étude d'un exemple fondamental : SUITE GÉOMÉTRIQUE DE PREMIER TERME $u_0 = 1$.

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = q^n$ ($q \neq 0$ et $q \neq 1$)

Calculons la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$.

On peut écrire : $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n$
 $qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$

Par soustraction membre à membre, on obtient :

$$S - qS = 1 - q^{n+1} \quad \text{c'est à dire} \quad (1 - q)S = 1 - q^{n+1} \quad \text{et donc} \quad S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Cas général : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q ($q \neq 0, q \neq 1$).

Calculons la somme $S = u_4 + u_5 + \dots + u_8$

$$\text{On a } S = u_4 + qu_4 + q^2 u_4 + q^3 u_4 + q^4 u_4 = u_4(1 + q + q^2 + q^3 + q^4)$$

$$\text{Ainsi } S = u_4 \frac{(1 - q^5)}{1 - q}$$

Propriété :

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q , on applique la formule suivante :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Exemple :

Soit (v_n) la suite géométrique définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 2^n$

$$\text{On a } 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 1 \frac{(1 - 2^{n+1})}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$$

3) LIMITES DES SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

A) SUITES ARITHMÉTIQUES (évident)

Propriété :

Toute suite arithmétique de raison r non nulle est divergente.

- Si $r > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

B) SUITES GÉOMÉTRIQUES (q^n) (admis)

Propriété :

Soit q un réel .

- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors pour tout n , $q^n = 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) est divergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) est divergente

Exemple :

La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison 2 supérieure à 1 ; elle est donc divergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Remarque :

On en déduit facilement le cas général $u_n q^n \dots$

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -5 \times 2^n$.

On a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$; on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$