

Suites arithmétiques - Définition

Ex 1 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

Soit (u_n) la suite arithmétique de 1^{er} terme 3 et de raison 4.

1) $u_9 - 4 = u_8$ 2) $u_{13} - u_{11} = 8$ 3) $u_{n+1} = u_n + 3$ 4) $u_{n+1} = n + 4$

5) $u_n = 3n + 4$ 6) $u_n = 4n + 3$ 7) $u_n = u_1 + 4(n - 1)$

Ex 2 : QCM : un peu de logique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Parmi les propositions suivantes la ou lesquelles caractérisent-elles la suite (u_n) ?

- a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists r \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1} - u_n = r$
- b) $\exists n \in \mathbb{N}$ et $\exists r \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1} - u_n = r$
- c) $\exists r \in \mathbb{R}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$

Ex 3 : Reconnaître une suite arithmétique

Indiquer dans chaque cas, si la suite est arithmétique. Dans l'affirmative, indiquer la raison et le 1^{er} terme.

- | | |
|--|--|
| 1) $u_n = 4n + 8$ | 6) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} - u_n = -2 \end{cases}$
7) $u_n = \sqrt{n^2 + 25}$
8) $u_n = \frac{1}{7}n - \frac{1}{9}$
9) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + \frac{3}{7} \end{cases}$
10) $u_n = \frac{n+4}{4}$ |
| 2) $u_n = 2^n + 4$ | |
| 3) $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 2n \end{cases}$ | |
| 4) (u_n) est la suite des nombres entiers naturels multiples de 5. | |
| 5) $u_n = f(n)$, où f est une fonction affine | |

Ex 4 : Déterminer un terme d'une suite arithmétique

- 1) Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_7 = -5$ et $u_{37} = 41$. Déterminer u_0 et u_{10} .
- 2) On considère la suite des nombres entiers naturels pairs ($v_0 = 0$, $v_1 = 2$, ...). déterminer v_{41} .
- 3) Soit (w_n) la suite définie par $w_1 = 5$ et, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $w_{n+1} = w_n + 3$. Déterminer w_{27} .

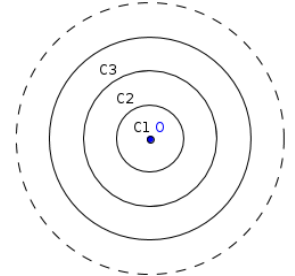
Ex 5 : Problème : abonnements

Le 01/01/2015, un journal comptait 15000 abonnés. Une étude a montré que, chaque mois, 850 abonnements arrivent à échéance. Sur ce 850 abonnements, 90 % sont renouvelés. De plus 240 nouveaux abonnements sont souscrits. On note (u_n) le nombre d'abonnements du journal au bout de n mois à partir du 01/01/2015. On a $u_0 = 15000$.

- 1) Calculer u_1 et u_2 , puis interpréter ces résultats pour le journal.
- 2) Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique.
- 3) En estimant que l'évolution des abonnements reste celle montrée par l'étude, prévoir le nombre d'abonnés au journal le 01/01/2025.

Ex 6 : Problème : cible

1) Soit O un point du plan et pour chaque entier naturel n non nul, on note C_n le cercle de centre O dont le rayon mesure n cm.



Montrer que les rayons des cercles forment une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) Pour chaque entier naturel n non nul, on note A_n l'aire en cm^2 du disque de rayon n . La suite (A_n) est-elle arithmétique ?

3) On note S_1 l'aire du disque de rayon 1cm ($S_1 = A_1$) et, pour chaque entier naturel $n \geq 2$, on note S_n l'aire de la couronne délimitée par les cercles C_n et C_{n-1} .

- a) Démontrer que la suite (S_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
- b) Déterminer l'aire de la couronne délimitée par les cercles C_{12} et C_{11} .

Étudier le comportement d'une suite arithmétique

Ex 7 : Sens de variation et limites

Déterminer dans chaque cas, le sens de variation et la limite de (u_n) .

1) $u_n = -\frac{1}{3}n + 4$ 2) $u_n = 5n - \frac{3}{7}$ 3) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n - u_{n+1} = \frac{13}{14} \end{cases}$

Ex 8 : Utiliser une suite auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n} \end{cases}$.

- 1) Conjecturer le sens de variation de (u_n) .
- 2) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. On admet, ce que l'on pourra prouver en terminale par récurrence, que la suite prend ses valeurs dans \mathbb{R}^+ .
 - a) Montrer que la suite est arithmétique.
 - b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n .
 - c) Justifier le sens de variation de (u_n) conjecturé à la question 1).

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Ex 9 : Quelques calculs

- 1) Calculer $\sum_{i=0}^{21} u_i$ où (u_n) est la suite arithmétique de 1^{er} terme 2 et de raison 3.
- 2) calculer $T = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + 3 + \dots + \frac{19}{3} + 7$
- 3) $R = 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + 90$
- 4) $S = 10^5 \times 10^6 \times 10^7 \times \dots \times 10^{15}$

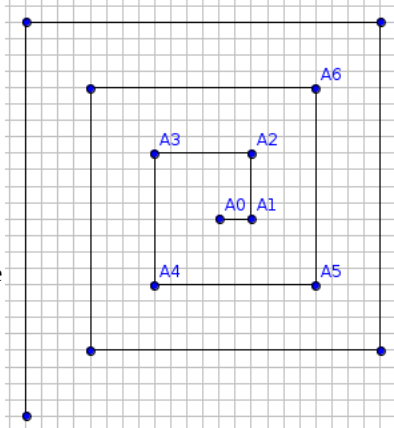
Ex 10 : Problème : fréquentation dans un parking

On constate une fréquentation de 350 voitures le premier jour d'exploitation d'un parking . On prévoit une augmentation du passage dans ce parking, de 10 voitures supplémentaires chaque jour.

Quelle est la somme totale de voitures passées dans ce parking la première semaine d'exploitation ?

Ex 11 : Problème : longueur d'une spirale

On considère la spirale ci-contre ; Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = A_n A_{n+1}$



- 1) On a $u_0 = 2$. Déterminer u_1 et u_2 .
- 2) Déterminer la nature de la suite (u_n) .
- 3) Calculer la longueur de la spirale $A_0 A_1 A_2 \dots A_{12}$

Ex 12 : Problème : coût total

On dispose d'un crédit de 414000 euros pour atteindre dans un désert une nappe souterraine . Le coût du forage est fixé à 1000 euros pour le premier mètre creusé, 1200 pour le deuxième, 1400 pour le troisième et ainsi de suite en augmentant de 200 euros par mètre creusé.

On pose $u_0 = 1000$, $u_1 = 1200$... u_n désigne donc le coût en euros du $(n+1)$ ième mètre creusé.

- 1) a) Calculer u_5
- b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- c) Déduire du b) la nature de la suite (u_n) .
- d) Exprimer u_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par S_n le coût total en euros d'un puits de n mètres. Déterminer le coût total d'un puits de n mètres.
- 3) Déterminer la profondeur maximale que l'on peut atteindre avec le crédit de 414000 euros.

Suites géométriques – Définition

Ex 13 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

Soit (u_n) la suite géométrique de 1^{er} terme 8 et de raison 3.

- 1) $3u_8 = u_9$ 2) $\frac{u_{13}}{u_{11}} = 9$ 3) $u_{n+1} = 8u_n$ 4) $u_{n+1} = 3u_n$
- 5) $u_n = 3 \times 8^n$ 6) $u_n = 8 \times 3^n$ 7) $u_n = u_1 + 3^{n-1}$

Ex 14 : Géométrie et arithmétique

Existe-t-il une suite qui soit à la fois arithmétique et géométrique ?

Ex 15 : Reconnaître une suite géométrique

Indiquer dans chaque cas, si la suite est géométrique . Dans l'affirmative, indiquer la raison et le 1^{er} terme.

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1) $u_n = 2 \times 5^{n+1}$ 2) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{3} \end{cases}$ 3) $u_n = \frac{3}{5^n}$ 4) $u_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^n$ 5) $u_n = 3 \times n^7$ | <ol style="list-style-type: none"> 6) $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3} \end{cases}$ 7) $u_n = \frac{5}{2^n}$ 8) $u_n = \frac{7^{n+1}}{3^n}$ 9) $u_n = 11 \times 5^{2n+1}$ 10) $u_n = n^3$ |
|---|---|

Ex 16 : Déterminer un terme d'une suite géométrique

- 1) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 65536$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{4}$. Déterminer u_1 , u_2 et u_6 .
- 2) Soit (u_n) la suite géométrique telle que $u_7 = 12$ et $u_8 = 18$. déterminer u_0 et u_{15} .

Ex 17 : Trois termes consécutifs

- 1) Les trois nombres -5 , 85 et -1445 sont-ils trois termes consécutifs d'une suite géométrique ? Si oui, préciser la raison de la suite.
- 2) Même question avec :
 - a) 2,71 , 10,0812 et 37,50206
 - b) $-\frac{17}{3}$, $-\frac{84}{27}$ et $\frac{215}{147}$

Ex 18 : Problème : décote d'une voiture

Supposons que la décote d'une voiture est de 20 % par an. Neuve, elle vaut 18000 euros. Combien vaudra-t-elle dans 5 ans ?

Ex 19 : Problème : population d'une ville

Depuis 30 ans, la population d'une ville diminue de 1 % par an. Aujourd'hui, il y a 44382 habitants . Combien y en avait-il il y a trente ans.

Ex 20 : Problème : deux possibilités (suites arithmétique et géométrique)

Dans une entreprise, une machine a été achetée 10000 euros. Deux possibilités ont été envisagées pour prendre en compte l'usure et le vieillissement de la machine.

1) Première possibilité :

On estime que la machine perd 20 % de sa valeur par an . Déterminer la valeur de la machine au bout de 5 ans.

2) Deuxième possibilité :

On estime que la machine perd 2000 euros par an . Déterminer la valeur de la machine au bout de 5 ans.

Ex 21 : Moyenne arithmétique et moyenne géométrique

1) Démontrer que la moyenne arithmétique de trois termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à l'un de ces trois termes.

2) On appelle moyenne géométrique de deux nombres réels positifs a et b le nombre $m = \sqrt{ab}$.

Soit (u_n) une suite géométrique de 1^{er} terme $u_0 > 0$ et de raison $q > 0$. Démontrer que chacun des termes (excepté u_0) est égal à la moyenne géométrique du terme qui le précède et du terme qui le suit.

Étudier le comportement d'une suite géométrique

Ex 22 : Sens de variation et limites

Déterminer dans chaque cas, le sens de variation et la limite de (u_n) .

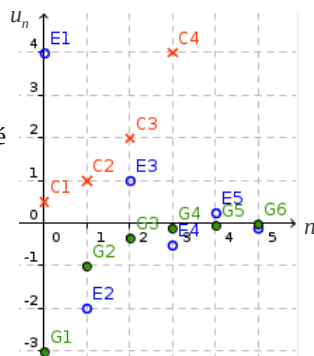
1) $u_n = -\frac{1}{3} \times 4^n$ 2) $u_n = -6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 3) $u_n = \frac{5^{n-1}}{7}$ 4) $u_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n$

5) $u_n = \frac{13}{8^n}$ 6) $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{13}{12} \end{cases}$

Ex 23 : Interpréter une représentation graphique

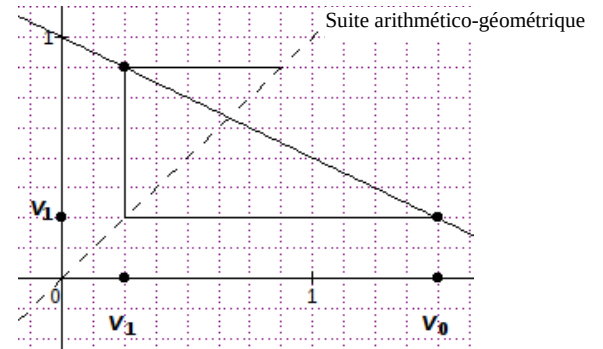
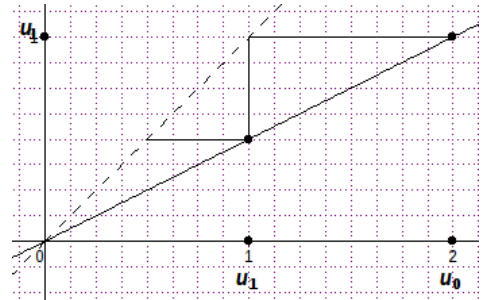
1) Trois suites géométriques ont été représentées ci-contre avec GeoGebra.

Déterminer pour chacune d'elle, sa raison, son premier terme, son sens de variation et sa limite.



2) Deux suites ont été représentées ci-dessous avec le logiciel SineQuaNon.

La représentation a été interrompue au deuxième terme.



Pour chacune des suites, compléter la représentation, déterminer son sens de variation et sa limite puis la formule de récurrence.

Ex 24 : Utiliser une suite auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 7}{4} \end{cases}$.

1) Représenter graphiquement la suite (u_n) , puis conjecturer la limite de (u_n) .

2) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n - 7$.

- a) Montrer que la suite est géométrique.
- b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n .
- c) Justifier la limite de (u_n) conjecturée à la question 1) .
- d) Peut-on avoir $u_n = 7$?

Ex 25 : Problème : population de bactéries

Dans un milieu de culture adéquat, le taux de croissance d'une population de bactéries Escherichia coli est de 700 % par heure.

On note p_0 la population initiale de bactérie et p_n la population après n heures de culture.

Expliquer pourquoi le taux de croissance ne peut se maintenir à ce niveau durant une longue période de temps.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

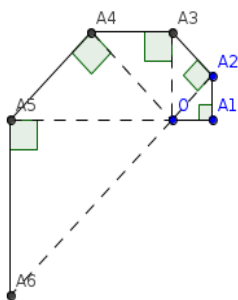
Ex 26 : Quelques calculs

1) Calculer $\sum_{i=0}^{21} u_i$ où (u_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme 2 et de raison 3.

2) Calculer $S=9+27+81+\dots+59049$

3) Calculer $T=-\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^3+\dots-\left(\frac{1}{3}\right)^7+\left(\frac{1}{3}\right)^8$

Ex 27 : Problème : longueur d'une spirale



À partir de deux points O et A_1 du plan tel que $OA_1=1$, on construit le triangle OA_1A_2 rectangle et isocèle en A_1 .

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on construit les points A_n tels que le triangle OA_nA_{n+1} soit rectangle et isocèle en A_n .

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = A_n A_{n+1}$.

1) Calculer u_1 et u_2 .

2) Conjecturer la nature de la suite (u_n) .

3) Calculer la longueur de la spirale $A_1 A_2 \dots A_{15}$

Ex 28 : Problème : production totale

En janvier 2009, une firme offrait sur le marché 2000 unités d'un nouveau produit, avec une perspective d'augmentation de cette production de 5 % par an.

On suppose que ces prévisions allaient se poursuivre. On pose $p_0=2000$.

On note p_n la quantité offerte en janvier de l'année $(2009+n)$. Pour 2010, $n=1$; pour 2011, $n=2$...

1) Calculer p_1, p_2, p_3 .

2) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_{n+1} en fonction de p_n . En déduire la nature de la suite (p_n) .

3) Exprimer p_n en fonction de n .

4) Calculer la production totale prévisible entre janvier 2009 et janvier 2020.

Ex 29 : Utilisation d'une suite auxiliaire

Soit la suite u définie sur \mathbb{N} par $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3 \end{cases}$

1) a) Calculer u_1 et u_2 .

b) La suite u est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.

2) À l'aide de la calculatrice :

a) Déterminer une valeur approchée de u_{15} à 10^{-6} près.

b) Que remarque-t-on lorsque l'on soustrait 6 à chaque terme de la suite u ?

3) Soit v la suite définie sur \mathbb{N} , par $v_n = u_n - 6$.

a) Démontrer que v_n est une suite géométrique.

b) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

c) Retrouver alors u_{15} .

4) Calculer $S = \sum_{i=0}^{20} v_i$ et $T = \sum_{i=0}^{20} u_i$

Ex 30 : Algorithme (consulter [suites_ari_geo_algo30.htm](http://pierrelux.net/suites_ari_geo_algo30.htm))

Sur un axe orienté $(O; \vec{i})$, on considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante :

- Les points A_0 et B_0 ont pour abscisses respectives $a_0=1$ et $b_0=7$

- Les points A_n et B_n ont pour abscisses respectives a_n et b_n

vérifiant les relations de récurrence :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}$$

1) Placer, sur l'axe, les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2 .

2) Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = b_n - a_n$.

a) Démontrer que u_n est une suite géométrique.

b) Exprimer u_n en fonction de n .

c) Que peut-on dire du signe de u_n ? Interpréter géométriquement.

3) a) Démontrer que la suite (a_n) est croissante. Interpréter géométriquement.

b) Démontrer que la suite (b_n) est décroissante. Interpréter géométriquement.

4) On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = a_n + b_n$.

a) Montrer que la suite (v_n) est constante.

b) Démontrer que les segments $[A_n B_n]$ ont tous le même milieu que l'on déterminera.

c) Que peut-on conjecturer sur la limite de chacune des suites (a_n) et (b_n) ? Interpréter géométriquement.

5) Corriger cet algorithme et expliquer son rôle.

```

a ← 1
b ← 7
i ← 0
lire p
Tant que (b-a>p) faire
    a ← (2*a+b)/3
    b ← (a+2*b)/3
    i ← i+1
FinTant que
afficher i
    
```