Pour les exercices où on fait référence à des coordonnées ou des équations, on se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Relations métriques dans le triangle

Ex 1 : *Théorème de la médiane*

Soit le triangle ABC tel que AB=6, AC=4 et BC=5.
Déterminer la longueur de la médiane issue de A.

Ex 2 : *Trigonométrie dans le triangle*

Soit le triangle ABC isocèle en A tel que AB=3 et $\widehat{BAC}=40°$.
Donner une valeur approchée à l'unité près de la longueur de la médiane du triangle ABC issue de A.

Ex 3 : *Théorème d'Al Kashi*

Combien existe-t-il de triangles ABC tels que AB=7 , AC=8 et $\widehat{ACB}=60°$.

Ex 4 : *Deux méthodes*

Soit ABCD un parallélogramme de centre I tel que AB=6, AD=4 et $\widehat{BAD}=60°$.
1) Calculer $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2$ et $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2$. En déduire AC et BD.
2) À l'aide du théorème d'Al Kashi, retrouver la distance BD.
3) À l'aide du théorème de la médiane, calculer AI, puis retrouver AC.

Ex 5 : *Théorème de la médiane - Théorème d'Al Kashi*

On souhaite construire un parallélogramme ABCD dont on connaît les longueurs des diagonales et un angle : AC=7 , $BD=\sqrt{19}$ et $\widehat{BAD}=60°$.
On pose $x=AB$ et $y=AD$.
1) A l'aide du théorème de la médiane, démontrer que $x^2+y^2=34$.
2) En utilisant l'angle $\widehat{BAD}$, démontrer que $x^2+y^2-xy=19$.
3) En déduire les dimensions du parallélogramme ABCD et le construire.

Ex 6 : *Loi des sinus - Aire d'un triangle*

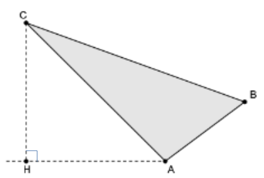
Les questions ci-dessous sont indépendantes.

1) Soit ABC un triangle, tel que BC=12, $\widehat{ABC}=62°$ et $\widehat{ACB}=50°$.
Déterminer le troisième angle et les deux autres côtés.

2) Soit ABC un triangle, tel que BC=25, AC=36 et $\widehat{ABC}=72°$.
Déterminer le troisième côté et les deux autres angles.

3) Soit ABC un triangle, tel que BC=36, $\widehat{ABC}=45°$ et $\widehat{ACB}=62°$.
Déterminer l'aire de ABC.

4) Sur la figure ci-contre, on a $\widehat{HAC}=42°$, $\widehat{BAC}=105°$, $\widehat{ABC}=36°$ et AB=3 .
Déterminer CH.



Droites

Ex 7 : *Restituer les notions du cours*

1) Donner un vecteur orthogonal au vecteur non nul $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

2) Donner un vecteur directeur de la droite d'équation $y=-3x+2$.

3) Donner un vecteur normal à la droite d'équation $2x-5y+3=0$.

4) $\vec{j}$ est-il un vecteur directeur de la droite d'équation $y=4$?

5) La droite d'équation $4x-3y+2=0$ est perpendiculaire à une certaine droite d . Donner un vecteur directeur de d .

6) Dire à chaque fois, s'il s'agit d'un vecteur directeur, d'un vecteur normal, ou d'un vecteur qui n'est ni directeur, ni normal à la droite d'équation $5x-3y+7=0$.

$$u_1\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix},\ u_2\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix},\ u_3\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix},\ u_4\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix},\ u_5\begin{pmatrix}6\\10\end{pmatrix},\ u_6\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$

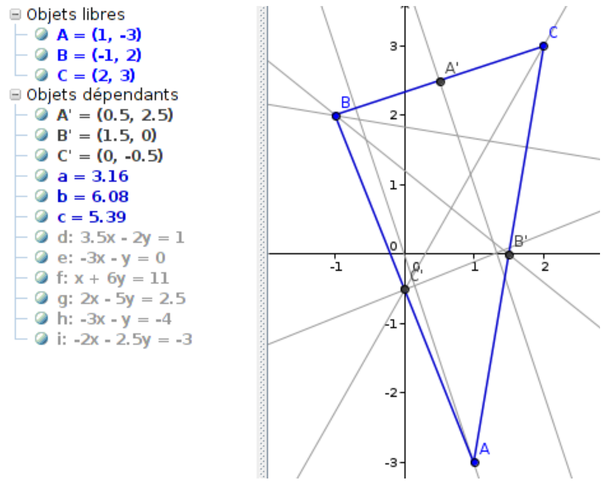
Ex 8 : *Déterminer des équations de droites perpendiculaires*

1) Écrire une équation de la droite d_1 passant par $A(-3;2)$ et de vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.

2) Écrire une équation de la droite d_2 passant par $B(5;-6)$ et perpendiculaire à la droite $\Delta_1 : 3x+5y-7=0$.

3) Écrire une équation de la droite d_3 passant par $C(2;7)$ et perpendiculaire à la droite $(O;\vec{i})$.

Ex 9 : *Droite d'Euler*



1) a) Tracer en rouge les deux médianes du triangle ABC qui ont été représentées sur la figure . Associer à ces médianes leur équation.
b) Retrouver par le calcul l'équation de la médiane issue de C.
c) En déduire les coordonnées du point G, centre de gravité de ABC et placer G sur la figure.

2) a) Tracer en bleu les deux médiatrices du triangle ABC qui ont été représentées sur la figure . Associer à ces médiatrices leur équation.
b) Retrouver par le calcul l'équation de la médiatrice relative au côté [BC].
c) En déduire les coordonnées du point Ω , centre du cercle circonscrit de ABC et placer Ω sur la figure.

3) a) Tracer en vert les deux hauteurs du triangle ABC qui ont été représentées sur la figure . Associer à ces hauteurs leur équation.
b) En déduire les coordonnées du point H, orthocentre de ABC et placer H sur la figure.

4) Démontrer que G, H et Ω sont alignés.

Cercles

Ex 10 : ***Équation d'un cercle défini par son centre et son rayon***

1) Donner une équation du cercle de centre (4;7) et de rayon 3.

2) Donner une équation du cercle de centre (-2;0) et de rayon 5.

Ex 11 : ***Équation d'un cercle défini par son diamètre***

1) Donner une équation du cercle de diamètre [EF] où E(3;5) et F(-4;2).

2) Soit le triangle ABC déterminé par A(-1;-1), B(0,5 ;-2) et C(1;2).

Montrer que ABC est un triangle rectangle, puis écrire une équation de son cercle circonscrit.

Ex 12 : ***Reconnaître l'équation d'un cercle.***

1) Dire à chaque fois si l'équation donnée est l'équation d'un cercle . Dans l'affirmative, préciser son centre et son rayon.

a) $x^2+y^2-5x+3y=-1$ b) $x^2+6x+y^2-4y+15=0$
c) $x^2+8x+y^2-4y+20=0$ d) $x^2+y^2-8x+y=-10$
e) $3x^2-4x+3y^2-6y-15=0$ f) $2x^2+4x+y^2-3y-8=0$

2) Déterminer les valeurs du réel k telles que l'équation $x^2+y^2-2x+6y=k$ soit l'équation d'un cercle.

3) Existe-t-il un réel a tel que l'équation $x^2+y^2-2ax+4y=20$ soit celle d'un cercle de rayon 7 ?
Dans l'affirmative, préciser les coordonnées de son centre.

4) Montrer que l'équation $x^2+y^2-2ax-2by=0$ (avec $a\neq 0$ et $b\neq 0$) est toujours celle d'un cercle . Préciser son centre et son rayon.

Ex 13 : ***Ensemble de points***

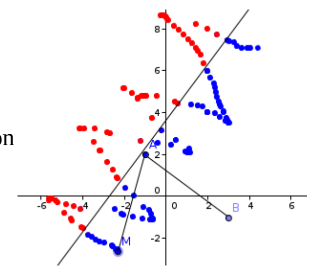
Soit les points A(-2 ;-5) et B(2 ;-1).
1) Déterminer une équation du cercle C de diamètre $[AB]$.
2) a) Prouver que le point O n'appartient pas à C .
b) Déterminer les coordonnées exactes des points d'intersection de C et de l'axe des ordonnées.
c) Démontrer que C ne coupe pas l'axe des abscisses.
3) On considère l'ensemble E des points M du plan tels que $\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2=32$.
On considère $M(x;y)$. Exprimer $\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2$ en fonction de x et y , puis en déduire la nature de l'ensemble E.

Ex 14 : ***Ensemble de points***
(consulter appl_ps_geo14_1.html et appl_ps_geo14_2.html)

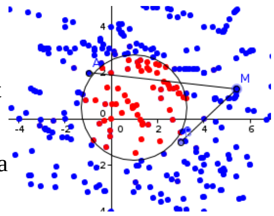
Soit les points A(-1;2) et B(3;-1).
1) On veut déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$

a) On pose $M(x;y)$. démontrer que E est une droite dont on donnera une équation.

b) Donner une autre méthode de construction de E sans utiliser les coordonnées de M.



2) On veut déterminer l'ensemble F des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-1$
a) Démontrer que $M(x;y)$ appartient à F si et seulement si $x^2+y^2-2x-y-4=0$.
En déduire que F est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.



b) Retrouver la nature de l'ensemble F, sans utiliser les coordonnées de M, en introduisant le milieu I de [AB], et en démontrant que M appartient à F si et seulement si $\mathrm{IM}^2-\frac{\mathrm{AB}^2}{4}=-1$.

Trigonométrie

Ex 15 : ***Retrouver les lignes trigonométriques des angles associés***

En utilisant la formule $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$, retrouver les expressions de $\cos(\pi-x)$ et de $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

En utilisant de la même façon les autres formules, on retrouve les lignes trigonométriques des angles associés.
Par exemple, retrouver l'expression de $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

Ex 16 : ***En fonction de*** $\cos x$ ***et*** $\sin x$

Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

a) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ b) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ c) $\cos\left(\frac{4\pi}{3}-x\right)$

d) $\sin\left(x-\frac{5\pi}{3}\right)$ e) $\cos\left(-x+\frac{3\pi}{4}\right)$ f) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}-x\right)$

Ex 17 : $\cos(2a)$ **,** $\sin(2a)$

1) Peut-on avoir :
a) $\cos(2a)=2\cos a$ b) $\sin(2a)=2\sin a$

2) On donne $\cos a=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (où $a\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$).

En calculant $\cos(2a)$, trouver a .

Ex 18 : ***Équations***

Trouver les solutions réelles des équations ci-dessous :
a) $\sin(2x)=\cos x$ b) $3\cos(2x)+2\sin^2 x=0$

Ex 19 : ***Simplification***

Simplifier :
$P=\cos x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{4}\right)$, $Q=\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$

Ex 20 : ***Valeur exacte***

a) Exprimer $\frac{7\pi}{12}$ en fonction de $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{\pi}{3}$.

b) Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et celle de $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.