

COLINÉARITÉ ET ÉQUATIONS DE DROITES

1) BASE ET REPÈRE

A) COORDONNÉES D'UN POINT

→ Repérage sur une droite :

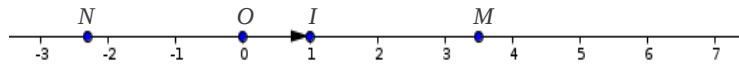
Choisir un repère sur une droite d , c'est se donner deux points distincts O et I de d , pris dans cet ordre. O est l'origine du repère. Posons alors $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$. Le vecteur \vec{i} est appelé **vecteur de base**. Le repère est noté $(O; \vec{i})$.

Définition :

L'abscisse du point M de d dans le repère $(O; \vec{i})$ est le réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$.

Exemples : $\overrightarrow{OM} = \frac{7}{2} \vec{i}$ signifie que M a pour abscisse $\frac{7}{2}$ dans le repère $(O; \vec{i})$.

N a pour abscisse $-2,3$ dans le repère $(O; \vec{i})$ signifie que $\overrightarrow{ON} = -2,3 \vec{i}$.



→ Repérage dans le plan :

Définition :

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un **repère** du plan. Il est constitué d'un point O appelé **origine** du repère et d'une **base** (\vec{i}, \vec{j}) , c'est à dire deux vecteurs non colinéaires pris dans cet ordre.

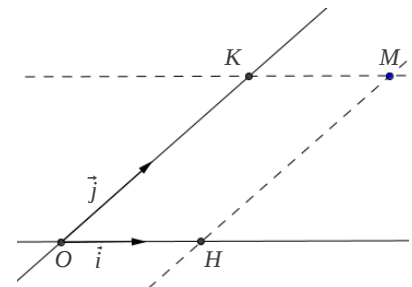
Remarques :

- Lorsque les directions des vecteurs \vec{i} et \vec{j} sont perpendiculaires, la base (\vec{i}, \vec{j}) est orthogonale et le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est **orthogonal**.
- Une unité de longueur étant choisie, si \vec{i} et \vec{j} ont des directions perpendiculaires et ont pour norme 1, alors la base (\vec{i}, \vec{j}) est orthonormale et le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est **orthonormal**. (On dit aussi orthonormé)

Coordonnées d'un point dans un repère :

Soit M un point du plan muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. En traçant la parallèle à chaque axe passant par M , on obtient deux points H et K . Il existe un unique réel x et un unique réel y tels que $\overrightarrow{OH} = x \cdot \vec{i}$ et $\overrightarrow{OK} = y \cdot \vec{j}$. On a alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$, c'est à dire $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$.

On dit que $(x; y)$ est le **couple des coordonnées** du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



B) COORDONNÉES D'UN VECTEUR

Dans ce paragraphe, un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan est fixé.

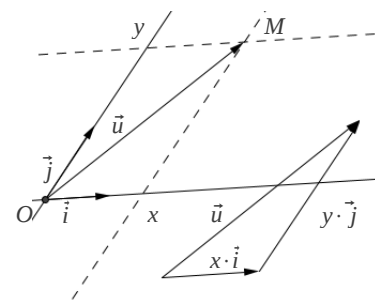
\vec{u} est un vecteur donné.

M est le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Notons $(x; y)$ les coordonnées du point M .

Alors $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$. Donc $\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$.

Ainsi tout vecteur du plan peut s'écrire sous la forme: $\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$



Définition :

Dire que le vecteur \vec{u} a pour **coordonnées** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ signifie que $\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$.

On note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Remarque : On dit aussi que le vecteur \vec{u} a pour **coordonnées** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

2) CONDITION DE COLINEARITÉ

Propriété :

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ fixé, dire que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont **colinéaires** équivaut à dire que $xy' - x'y = 0$.

Preuve :

• Dans le cas où \vec{u} (ou \vec{v}) est nul, le résultat est immédiat.

• Supposons que \vec{u} et \vec{v} sont non nuls.

La colinéarité de \vec{u} et \vec{v} équivaut à la proportionnalité des coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, c'est à dire à l'égalité $xy' - x'y = 0$.

D'où le résultat.

Exemple :

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, alors $xy' - x'y = \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{2}{5} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 0$ et donc \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

3) ÉQUATIONS DE DROITES

Dans ce paragraphe, un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan est fixé.

A) VECTEURS DIRECTEURS

Définition :

Soit d une droite du plan.

On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur \vec{u} non nul tel qu'il existe deux points distincts A et B de d tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

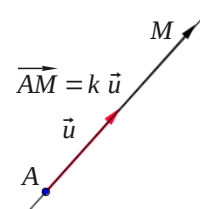
Remarques :

- Un vecteur directeur indique la direction de d . On dit aussi que le vecteur directeur dirige la droite.
- Toute droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.
- Deux droites du plan de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{v} sont parallèles si et seulement si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Propriété :

Soit d une droite, A un point de d et \vec{u} un vecteur directeur de d .

La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{u} soient colinéaires.



Remarque : Une droite est parfaitement déterminée par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u} \neq 0$.

B) ÉQUATIONS CARTÉSIENNES D'UNE DROITE

Définition :

Soit d une droite du plan.

On appelle équation de d toute relation vérifiée par les coordonnées $(x ; y)$ des points de d .

Exemple :

Soit d la droite d'équation $y = 2x - 1$.

Cela signifie que les coordonnées x et y de n'importe quel point de d vérifient la relation $y = 2x - 1$.

Pour qu'un point appartienne à d , il faut et il suffit que ses coordonnées vérifient l'équation de d .

Par exemple le point $A(2 ; 3)$ appartient à d car on a bien $3 = 2 \times 2 - 1$

En revanche le point $B(1 ; 4)$ n'appartient à d car $4 \neq 2 \times 1 - 1$

Remarque :

Il n'y a pas unicité de l'équation d'une droite car si $y = 2x - 1$ est une équation de la droite d , $2y = 4x - 2$ en est une autre, ainsi que $2x - y - 1 = 0$

Cas particuliers :

- $x = 4$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées (une droite dont tous les points ont même abscisse)
- $y = 3$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses (une droite dont tous les points ont même ordonnée)

Quelle est la forme générale des équations de droite ?

Exemple : Déterminer l'équation de la droite d passant par $A(1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $M(x; y)$ un point du plan.

On a : $\vec{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$

$M \in d$ si et seulement si \vec{AM} et \vec{u} sont colinéaires, c'est à dire :

$$(x-1) \times 1 - (-1) \times (y-2) = 0 \Leftrightarrow x-1+y-2=0 \Leftrightarrow x+y-3=0 \Leftrightarrow y=-x+3$$

Propriétés :

- Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a , b et c sont trois réels tels que a et b ne sont pas simultanément nuls.

Cette équation est appelée équation cartésienne de d . Un vecteur directeur de cette droite est alors le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

- Dans le cas particulier où $b \neq 0$, c'est-à-dire si la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées (c'est-à-dire si ses vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires à \vec{j}), d admet une équation de la forme $y = mx + p$ où m et p sont deux réels.

Cette équation est appelée **équation réduite** de d .

Un vecteur directeur de cette droite est alors le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ où m est le **coefficient directeur** de d .

- Toute droite d parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x = k$ où k est un réel.

Preuve :

- Toute droite d étant définie de manière unique par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur non nul, on note :

$A(x_0; y_0)$ un point de d et $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un de ses vecteurs directeurs (α et β ne sont pas simultanément nuls)

Soit $M(x; y)$ un point du plan.

M appartiendra à d si et seulement si les vecteurs $\vec{AM} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est à dire :

$$(x-x_0)\beta - (y-y_0)\alpha = 0 \Leftrightarrow \beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0$$

En posant $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_0 - \beta x_0$, on constate que l'équation de la droite d est de la forme $ax + by + c = 0$ où a et b ne sont pas simultanément nuls (car α et β ne le sont pas).

$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est alors un vecteur directeur de d .

Réciproquement, si l'équation d'un ensemble de points $M(x; y)$ est de la forme $ax + by + c = 0$,

alors soit $A(x_0; y_0)$ un point de cet ensemble, vérifiant $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Par soustraction membre à membre des deux égalités, il vient $a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0 \Leftrightarrow a(x-x_0) - (-b)(y-y_0) = 0$, ce qui est la condition de colinéarité des vecteurs $\vec{AM} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est donc la droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ passant par $A(x_0; y_0)$.

- Si $b \neq 0$, l'équation $ax + by + c = 0$ se réécrit donc sous la forme $y = mx + p$ avec $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.

Un vecteur directeur de cette droite étant $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, un autre est $\vec{v} = \frac{-1}{b} \vec{u}$ c'est-à-dire $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

- Si d est parallèle à l'axe des ordonnées, alors un de ses vecteurs directeurs est $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$.

Puisque $b = 0$ et $a \neq 0$, une équation de d est donc $ax + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$ qui est de la forme $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$).