

Normes, angles orientés de vecteurs, projections orthogonales

**Ex 1 : Vrai ou faux - restituer les notions du cours**

- 1)  $\|\vec{AB}\| = \|\vec{BA}\|$
- 2)  $\|-5\vec{u}\| = -5\|\vec{u}\|$
- 3) Si  $\|\vec{u}\|=3$  et  $\|\vec{v}\|=4$ , alors  $\|\vec{u} + \vec{v}\|=7$
- 4) Si I est le milieu de [AB], alors  $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AI}\| + \|\vec{IB}\|$
- 5) Si A, B et C sont trois points alignés, alors  $\|\vec{AC}\| = \|\vec{AB}\| + \|\vec{BC}\|$

Pour les questions 6, 7, 8 et 9, on considère un triangle équilatéral.

- 6)  $(\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{BC}, \vec{BA})$
- 7)  $(\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{AC}, \vec{AB})$
- 8)  $(\vec{CA}, \vec{BA}) = (\vec{AC}, \vec{CB})$
- 9)  $(\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{BA}, \vec{CA})$

10) Si les projections orthogonales de deux vecteurs sont égales, alors ces deux vecteurs sont égaux.

11) Si  $\vec{AB}$  a pour projeté orthogonal  $\vec{A'B'}$  sur une droite  $d$ , alors  $ABB'A'$  est un parallélogramme.

12) Si ABCD est un parallélogramme, alors le projeté orthogonal de  $\vec{AB}$  sur une droite  $d$  est égal au projeté orthogonal de  $\vec{DC}$  sur  $d$ .

13) Le projeté orthogonal d'un parallélogramme est un parallélogramme aplati.

14) Si  $\vec{u}'$  est le projeté orthogonal de  $\vec{u}$  sur une droite  $d$ , alors  $\|\vec{u}'\| \leq \|\vec{u}\|$

15) Si  $\vec{u}'$  est le projeté orthogonal de  $\vec{u}$  sur une droite  $d$ , alors  $3\vec{u}'$  est le projeté orthogonal de  $3\vec{u}$  sur  $d$ .

**Ex 2 : Normes**

Soit un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Dans chacun des cas suivants, calculer la norme du vecteur  $\vec{u}$  ou du vecteur  $\vec{AB}$ .

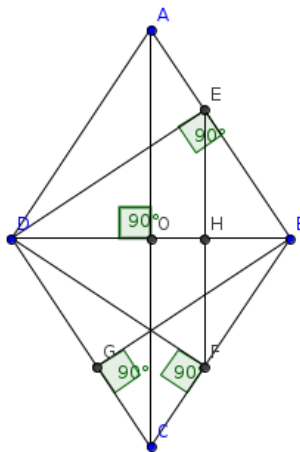
- 1)  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$
- 2)  $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{3}-5 \\ \sqrt{3}+5 \end{pmatrix}$
- 3) A  $(\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$  et B  $(\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$

**Ex 3 : Projection orthogonale**

ABCD est un losange de centre O.  
ABD est un triangle équilatéral.

Déterminer les projections orthogonales suivantes :

- 1)  $\vec{AB}$  sur (BD)
- 2)  $\vec{AD}$  sur (DE)
- 3)  $\vec{AD}$  sur (DF)
- 4)  $\vec{DE}$  sur (DB)
- 5)  $\vec{DE}$  sur (BG)
- 6)  $\vec{EF}$  sur (AC)

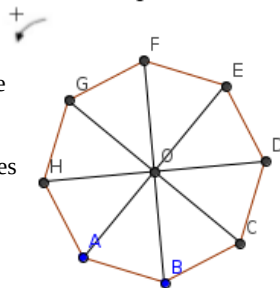


**Ex 4 : Angles orientés de vecteurs**

Dans le plan orienté, on considère l'octogone régulier ABCDEFGH de centre O.

Déterminer en radian la mesure principale des angles orientés de vecteurs suivants :

- 1)  $(\vec{OA}, \vec{OB})$
- 2)  $(\vec{BA}, \vec{BO})$
- 3)  $(\vec{OA}, \vec{CO})$
- 4)  $(\vec{GD}, \vec{BA})$
- 5)  $(\vec{DH}, \vec{CD})$
- 6)  $(\vec{EF}, \vec{AH})$
- 7)  $(\vec{EH}, \vec{DB})$



**Les différentes expressions du produit scalaire**

**Ex 5 : Vrai ou faux - restituer les notions du cours**

- 1) Si  $\|\vec{u}\|=5$ ,  $\|\vec{v}\|=12$  et  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{3}$ , alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 20$
- 2)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{CA} \cdot \vec{BA}$

Pour les questions 3, 4 et 5, on considère que  $\vec{AB} = \vec{CD}$  et  $\vec{EF} = \vec{GH}$

- 3)  $\vec{AB} \cdot \vec{EF} = \vec{CD} \cdot \vec{GH}$
- 4)  $\vec{AB} \cdot \vec{EF} = \vec{GH} \cdot \vec{CD}$
- 5)  $\vec{AA} \cdot \vec{CD} = \vec{0}$
- 6) Si les points A, B et C sont alignés, alors  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC$

Pour les dernières questions, on considère un triangle ABC rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.

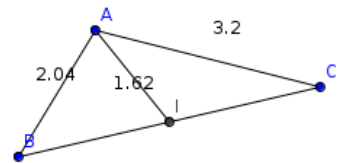
- 7)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$
- 8)  $\vec{AH} \cdot \vec{AB} = 0$
- 9)  $\vec{CA} \cdot \vec{CB} > 0$
- 10)  $\vec{HC} \cdot \vec{CA} > 0$
- 11)  $\vec{HB} \cdot \vec{HC} = -\vec{BH} \cdot \vec{HC}$
- 12)  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{HB} \cdot \vec{BC}$
- 13)  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = AB^2$

**Ex 6 : Choisir la méthode la plus adaptée**

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

- 1)  $AB=4$ ,  $AC=5$  et  $\widehat{BAC} = 45^\circ$
- 2)  $AB=2$ ,  $AC=7$  et  $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{5\pi}{6}$
- 3) Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on a A(2;3), B(-4;5) et C(-5;-7)
- 4) ABCD est un losange dont la longueur des côtés vaut 4 et tel que  $\widehat{ADC} = \frac{\pi}{6}$ . On donnera une approximation à  $10^{-1}$  près.
- 5) I est le milieu de [BC]

On donnera une approximation à  $10^{-1}$  près.



**Ex 7 : Choisir la méthode la plus adaptée**

Les questions ci-dessous sont indépendantes.

1) Soit ABCD un carré de côté 4 et E, le point du segment [AC] tel que  $AE = 0,4AC$ .

Calculer  $\vec{AD} \cdot \vec{AE}$

2) On considère l'octogone de la figure 4 avec  $HD=8$ .

Calculer :  $\vec{OD} \cdot \vec{OG}$ ,  $\vec{FB} \cdot \vec{FD}$ ,  $\vec{AD} \cdot \vec{AH}$  et  $\vec{FB} \cdot \vec{FA}$

3) ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de [BC].

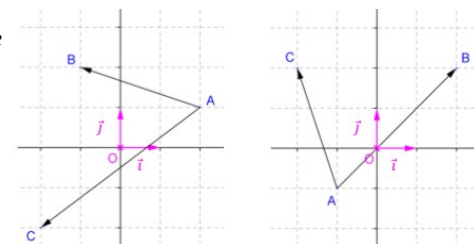
Calculer :  $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ ,  $\vec{CA} \cdot \vec{CI}$  et  $(\vec{AB} - \vec{AC}) \cdot \vec{AI}$

**Calculer un angle ou une longueur avec le produit scalaire**

**Ex 8 : Déterminer un angle**

1) Dans chacun des cas calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

2) En déduire  $\widehat{BAC}$

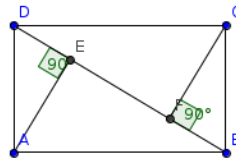


**Ex 9 : Déterminer une longueur**

On considère un rectangle ABCD tel que AB=5 et AD=3.

Les points E et F sont les projetés orthogonaux des points A et C sur la droite (BD).

En calculant de deux façons différentes le produit scalaire  $\vec{AC} \cdot \vec{DB}$ , déterminer la valeur exacte de la longueur EF.



**Ex 10 : Déterminer l'angle au sommet d'un triangle isocèle**

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points A(-3;2), B(-1;5) et C(1;2).

Montrer que le triangle ABC est isocèle et donner une mesure de son angle au sommet en degré à  $10^{-1}$  près.

**Propriétés – Opérations vectorielles**

**Ex 11 : Vrai ou faux - restituer les notions du cours**

- 1) Si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{t}$ , alors  $\vec{v} = \vec{t}$
- 2) Si  $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$ , alors  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$
- 3) Si  $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$ , alors  $\vec{u} = \vec{v}$  ou  $\vec{u} = -\vec{v}$
- 4) Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux, alors  $4\vec{u}$  et  $-5\vec{v}$  sont orthogonaux.
- 5) Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux, alors  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

Pour les dernières questions, on considère un triangle équilatéral ABC et H le pied de la hauteur issue de A.

6)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AH^2$  7)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0,5 AB^2$  8)  $\vec{AH} \cdot \vec{AB} = 0,75 AB^2$

**Ex 12 : Quelques calculs**

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que  $\|\vec{u}\|=3$ ,  $\|\vec{v}\|=4$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$ . Calculer :

- 1)  $\vec{u} \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v})$  2)  $(\vec{u} - 5\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v})$  3)  $(\vec{u} - 3\vec{v})^2$
- 4)  $\|\vec{u} + \vec{v}\|$  5)  $\|\vec{u} - \vec{v}\|$  6)  $\|2\vec{u} - 5\vec{v}\|$

**Ex 13 :**

1) Existe-t-il deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que  $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

2) Montrer que  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$

3) Peut-on déterminer deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$

**Ex 14 :**

Soit 4 points A, B, C et D tels que  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 4$  et  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3$ . Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$

**Orthogonalité et alignement**

**Ex 15 : Vecteurs orthogonaux ?**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Dans chacun des cas, dire si les vecteurs sont orthogonaux :

- 1)  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4876 \\ -4898873 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 317019173 \\ 315539 \end{pmatrix}$
- 2)  $\vec{w} \begin{pmatrix} 18^{497} \\ 17^{512} \end{pmatrix}$  et  $\vec{t} \begin{pmatrix} 17^{513} \\ 18^{498} \end{pmatrix}$
- 3)  $\vec{w} \begin{pmatrix} 18^{497} \\ 17^{512} \end{pmatrix}$  et  $\vec{s} \begin{pmatrix} 17^{511} \\ -17^{497} \end{pmatrix}$

**Ex 16 : Triangle rectangle**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On donne  $M(2; \lambda)$ ,  $A(1; 3)$  et  $L(4; 3 - \lambda)$ .

Déterminer le(s) réel(s)  $\lambda$  tel que le triangle MAL soit rectangle en A.

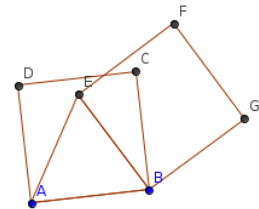
**Ex 17 : Démontrer que des droites sont perpendiculaires**

Soit ABCD un carré de côté  $a$ , I le milieu de [AB] et J le milieu de [AD].

Démontrer que les droites (CJ) et (DI) sont perpendiculaires.

**Ex 18 : Démontrer que des points sont alignés**

Soit ABE un triangle équilatéral de côté  $a$ , le carré ABCD contenant E et le carré EBGF contenant C.



- 1) Exprimer  $\vec{BC} \cdot \vec{BE}$  et  $\vec{EA} \cdot \vec{EB}$  en fonction de  $a$ .
- 2) Montrer que BCG est un triangle équilatéral.
- 3) Exprimer  $\vec{BC} \cdot \vec{BG}$  et  $\vec{DA} \cdot \vec{EF}$  en fonction de  $a$ .
- 4) Exprimer  $\vec{AE} \cdot \vec{EF}$  en fonction de  $a$ .
- 5) En déduire la valeur de  $\vec{DE} \cdot \vec{BF}$ .
- 6) Démontrer que les points D, E et G sont alignés.

**Ex 19 : Caractériser un quadrilatère**

Soit ABC un triangle équilatéral de côté  $a$ .

D et E sont les points tels que  $\vec{AD} = \frac{3}{2}\vec{BC}$  et  $\vec{BE} = \frac{1}{4}\vec{AC}$ .

- 1) Exprimer  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  en fonction de  $a$ .
- 2) Exprimer  $\vec{DE}$  en fonction des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .
- 3) Démontrer que les droites (AC) et (DE) sont perpendiculaires.
- 4) On note H le point d'intersection des droites (AC) et (DE). Exprimer  $\vec{AD} \cdot \vec{AC}$  en fonction de  $a$ , puis déterminer la distance AH.
- 5) En déduire la nature du quadrilatère EBHC.

**Ensemble de points**

**Ex 20 : Conjecture avec GeoGebra**

(consulter [produit\\_scalaire\\_geo20.html](http://produit_scalaire_geo20.html))

Soit A et B deux points tels que AB=4 cm. On cherche l'ensemble des points M du plan tels que  $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = k$ , ( $k \in \mathbb{R}$ ).

- 1) Dans GeoGebra, placer deux points A et B tels que AB=4.
- 2) Créer un point libre M puis une expression « ps » permettant de calculer le produit scalaire  $\vec{AB} \cdot \vec{AM}$ . (Utiliser la formule avec les normes et les angles)
- 3) Créer un curseur « k » variant de -20 à 20, puis définir un affichage conditionnel de M en bleu lorsque  $ps > k$  et rouge lorsque  $ps < k$ . (Clic droit sur le point > propriétés > avancé > couleurs dynamique)
- 4) Choisir  $k=12$ , puis activer la trace de M et balayer la zone de construction jusqu'à pouvoir conjecturer l'ensemble des points M tels que  $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 12$ . Démontrer cette conjecture.
- 5) Même question avec  $k=-6$ .

