Ex 1 : *Expériences aléatoires indépendantes ou non*

Pour chacune des propositions suivantes, dire si les deux expériences aléatoires sont indépendantes ou non.

1) On lance deux fois un dé non truqué.

2) On tire une carte d'un jeu de 32 cartes que l'on met de côté, puis on tire une seconde carte.

3) On tire une carte d'un jeu de 32 cartes que l'on remet dans le paquet, puis on tire une seconde carte.

4) Pour payer sa baguette de pain, une cliente sort au hasard une première pièce de son porte-monnaie puis une seconde.

Ex 2 : *Vrai ou faux*

On effectue, dans une urne contenant dix jetons noirs et vingt jetons blancs, deux tirages successifs avec remise du jeton tiré dans l'urne.

1) La probabilité d'obtenir deux jetons noirs est égale à $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$.

2) La probabilité d'obtenir deux jetons blancs est égales à $\frac{2}{3}\times\frac{19}{29}$.

3) La probabilité d'obtenir deux jetons de la même couleur est égale à $\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2$

4) La probabilité d'obtenir deux jetons de couleur différente est égale à $\frac{4}{9}$.

Ex 3 : *Arbre pondéré*

1) Dans une crèche, un jeu de construction en bois de 50 pièces comporte 20 cubes, 10 cylindres et 20 parallélépipèdes droits.
Un enfant choisit au hasard une pièce du jeu puis la repose dans la baril où est rangé le jeu . Il recommence l'opération. Représenter les deux expériences à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Sur les pièces cubes est gravé le chiffre 5, sur les cylindres le chiffre 2 et sur les pavés le chiffre 3.
Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale à la somme des deux chiffres obtenus.

Ex 4 : *Algorithme : décrire une expérience*

Décrire une expérience aléatoire pouvant être simulée par l'algorithme suivant :

Algorithme	Traduction en python

Pour i allant de 1 à 10 faire
a[i] ← flottant aléatoire compris entre 0 et 1
Si (a[i]<=0,1) alors
b[i] ← 1
FinSI
Sinon
Si (a[i]>=0,6) alors
b[i] ← 3
FinSI
Sinon
b[i] ← 2
FinSinon
FinSinon
Afficher b[i]
FinPour
	from random import random
	a,b=[0],[0]
	for i in range(1,11):
	a.append(random())
	if (a[i]<=0.1):
	b.append(1)
	else:
	if (a[i]>=0.6):
	b.append(3)
	else:
	b.append(2)
	print (b[i])
	
	(Faire tourner le programme)

Ex 5 : *Vrai ou faux: épreuves de Bernoulli*

Les expériences suivantes correspondent-elles à des épreuves de Bernoulli.

1) On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6 et on note le résultat obtenu.

2) On lance un dé cubique numéroté de 1 à 6 et on s'intéresse à la parité du résultat obtenu.

3) Pour jouer à « pile ou face », on lance deux pièces de monnaie et on note le nombre de « pile » obtenu .

4) On effectue un tirage dans une urne contenant des boules noires, rouges et blanches et on note la couleur de la boule obtenue.

5) On effectue un tirage dans une urne contenant des boules noires, rouges et blanches et on note si la couleur de la boule obtenue se retrouve dans le drapeau français.

Ex 6 : *Vrai ou faux : loi binomiale – coefficients binomiaux*

Soit k et n deux entiers naturels.

1) Dans un schéma de k épreuves de Bernoulli, $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant n succès.

2) Le coefficient $\binom{5}{4}$ n'existe pas.

3) $\binom{4}{0}=\binom{4}{4}=\binom{7}{7}=\binom{7}{0}$

4) $\binom{n+1}{1}=\binom{n}{1}+1$

5) $\binom{10}{7}=\binom{10}{3}$

6) L'équation $\binom{8}{4}+\binom{8}{5}=\binom{k}{5}$ a pour solution 8.

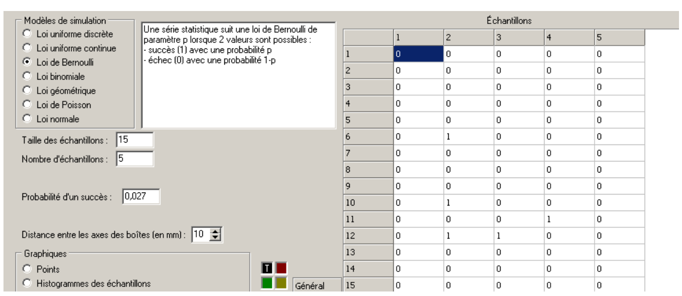
Ex 7 : *Reconnaître un modèle binomial*

Dans chacun des cas, justifier que la situation correspond au modèle binomial et donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X.

1) A Genève en 2008, l'institut de recherche sur les allergies et l'asthme a annoncé qu'un vaccin contre l'allergie aux chats a été testé avec succès sur des souris. En effet le vaccin guérit l'allergie chez les souris dans 88% des cas. Un laboratoire a testé le vaccin sur une population de 30 souris allergiques. Chaque matin un laborantin prélève deux souris de l'échantillon pour effectuer des analyses, prélèvement que l'on considère comme étant avec remise.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de souris saines prélevées par le laborantin.

2) Pierre joue à la roulette (numérotée de 0 à 36). Il mise 15 fois de suite sur le numéro « 12 ». On appelle X le nombre de parties remportées par Pierre.

On peut simuler cette expérience avec le logiciel SineQuaNon.



Utiliser un ordinateur ou une calculatrice
(Consulter loi_binomiale_ordi_calc.pdf)

Ex 8 : ***Calculer une probabilité : ascenseur***

Burj Khalifa, gratte ciel le plus haut du monde (en 2010) situé à Dubaï, compte 57 ascenseurs.
La probabilité qu'un ascenseur tombe en panne un jour donné est de 0,006. On considère que les pannes sont indépendantes les unes des autres. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'ascenseurs en panne un jour donné. X suit la loi binomiale de paramètres 57 et 0,006. Calculer et interpréter :

1) $P(X=2)$ 2) $P(X\leqslant 2)$ 3) $E(X)$

Ex 9 : ***Calculer une probabilité : clavier***

Un singe tape 300 fois sur un clavier alphanumérique comportant 40 touches. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le singe a tapé sur la lettre « Z ».

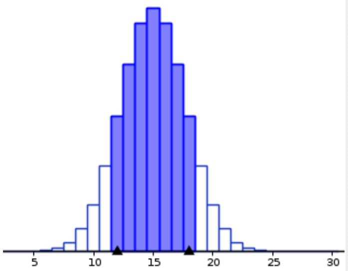
1) Justifier que la situation correspond au modèle binomial et donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X.

2) Calculer et interpréter :
a) $P(X=20)$ b) $P(X\leqslant 20)$ c) $E(X)$

Ex 10 : ***Propriété géométrique***

On considère une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres 30 et 0,5.

On a tracé la représentation graphique de X avec GeoGebra (version 4.2.6)



9	0.0133
10	0.028
11	0.0509
12	0.0806
13	0.1115
14	0.1354
15	0.1445
16	0.1354
17	0.1115
18	0.0806
19	0.0509
20	0.028
21	0.0133
22	0.0055

1) Quelle propriété géométrique observe-t-on ?

2) Justifier cette propriété.

Ex 11 : ***Coefficient binomiaux – sans calculatrice – triangle de Pascal***

1) Calculer sans calculatrice :

$$\binom{111}{0}\ ;\ \binom{15}{15}\ ;\ \binom{412}{1}\ ;\ \binom{15}{5}-\binom{15}{10}\ ;\ \binom{85}{84}\ ;\ \binom{86}{80}-\binom{85}{80}-\binom{85}{79}$$

2) À l'aide du triangle de Pascal, donner les valeurs des coefficients binomiaux de la forme $\binom{6}{k}$ où k est un entier compris entre 0 et 6.

Ex 12 : ***Problème : composants électroniques***

Un constructeur de composants électroniques produit des résistances. On admet que la probabilité qu'une résistance produite soit défectueuse est de 5×10^{-3}.

On prélève un lot de 1000 résistances dans la production et on suppose que le stock de résistances est suffisamment important pour assimiler le prélèvement à un tirage avec remise de 1000 résistances.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 1000 résistances, associe le nombre de résistances défectueuses.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Calculer la probabilité des événements suivants arrondis au millième.

a) « le lot contient exactement deux résistances défectueuses »

b) « le lot contient au plus strictement quatre résistances défectueuses »

c) « le lot contient au moins quatre résistances défectueuses »

3) Calculer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X et interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

Ex 13 : ***Problème : lecteurs MP3 (D'après Bac S – Polynésie juin 2009)***

Après fabrication, les lecteurs MP3 d'une entreprise (dont 6 % sont défectueux) subissent quatre contrôles successifs indépendants pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.

Un lecteur MP3 est :
- commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
- détruit s'il est rejeté au moins deux fois,
- commercialisé sans le logo sinon.

Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 euros.
Son prix de vente est de 120 euros pour un lecteur avec logo et 60 euros pour un lecteur sans logo.

On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

2) Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G. Donner une interprétation de ce résultat.

Aide : Utiliser la variable aléatoire Y égale au nombre de contrôles où un lecteur MP3 est rejeté.

Ex 14 : ***Problème : parc de centrales nucléaires***

Un défenseur du nucléaire informe que le risque qu'une panne se produise dans une centrale nucléaire est de l'ordre de 10^{-4}.

La réponse de son interlocuteur est la suivante : « Mais pour un parc de 100 centrales, la probabilité qu'une centrale du parc tombe en panne est d'environ 10^{-2} ».

Cette réponse est-elle correcte ?

Ex 15 : ***Problème : QCM***

Un QCM est composé de 8 questions indépendantes.
Pour chaque question quatre réponses sont proposées et une seule de ces quatre réponses est juste.
Un candidat répond au hasard aux 8 questions de ce QCM.
On appelle N le nombre de réponses justes qu'il obtient.

1) Montrer que la loi de probabilité de N est une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2) Calculer $P(N=8)$ et $P(N=4)$ à 10^{-4} près.

3) Donner la loi de probabilité de N.

4) Calculer l'espérance mathématique de N.

5) Que dire d'un QCM noté +1 pour une bonne réponse et 0 pour une mauvaise réponse ?

6) Comment doit-on noter ce QCM pour qu'un candidat qui répond au hasard ait en moyenne 0 ?

Échantillonnage - Intervalle de fluctuation

Définition :

Soit a le plus petit entier tel que $P(X\leqslant a)>0,025$ et b le plus petit entier tel que $P(X\leqslant b)\geqslant 0,975$.
L'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ est appelé **intervalle de fluctuation à 95 %**.

Règle de décision permettant de rejeter on non l'hypothèse :

Si la fréquence f de l'échantillon appartient à l'intervalle de fluctuation $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$, l'hypothèse sur la valeur de la proportion p de la population est acceptable, sinon l'hypothèse est rejetée au seuil de 5 %.

Ex 16 : *Comparaison avec $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ vu en seconde.*

On considère la loi binomiale B(50 ; 0,516).

En utilisant GeoGebra, justifier que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est l'intervalle [0,38 ; 0,66].

Comparer avec l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ vu en seconde.

Ex 17 : *Intervalle de fluctuation - GeoGebra*

Un constructeur affirme que la probabilité qu'un de ses téléviseurs ait une panne dans les 5 ans suivant son achat est égale à 0,12.

1) Déterminer, en utilisant GeoGebra (ou un tableur) , l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de pannes pour un échantillon de 100 téléviseurs.

2) Une association de consommateurs effectue un test sur 100 personnes ayant ce modèle de téléviseur.
Dans cet échantillon, 17 personnes ont eu une panne dans les 5 ans suivant leur achat.
Que peut-on penser de l'affirmation du constructeur ?

3) L'association pense maintenant effectuer un test sur 500 personnes.
Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de panne pour un échantillon de 500 téléviseurs. Interpréter.

Ex 18 : *Algorithme : déterminer l'intervalle de fluctuation*

(Faire tourner le programme avec algobox loi_binomiale_algo18.htm)

1) Compléter l'algorithme ci-contre permettant de trouver les entiers a et b , puis l'intervalle de fluctuation à 95 % pour une loi binomiale de paramètres n et p . (On prendra $n<100$)

2) a) En utilisant cet algorithme montrer que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la loi binomiale B(50 ; 0,42) est l'intervalle [0,28 ; 0,56].

b) En utilisant cet algorithme montrer que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la loi binomiale B(80 ; 0,42) est l'intervalle [0,3125 ; 0,525].

Algorithme

```
Lire n,p,seuil
s ←…
a←0
k←0
Tant que (s< …                    ) faire
    s←s+loi_binomiale(n,p,k)
  si (s> …              et    a= ...                ) alors
   a← …
   FinSi
  k ←k+1
FinTant que
b ← ...
Afficher ("l'intervalle de fluctuation à 95% est [",a,";",b,"]")
```

Traduction en python

```
from math import factorial

def binomial(n,p,k):
 return factorial(n)/(factorial(k)*factorial(n-k))*p**k*(1-p)**(n-k)


n=int(input("n="))
p=float(input("p="))
seuil=float(input("seuil="))
s=0
a=0
k=0
while (s<(1-(100-seuil)/200)):
 s=s+binomial(n,p,k)
 if (s>(100-seuil)/200 and a==0):
 a=k/n
 k=k+1
b=(k-1)/n
print("l'intervalle de fluctuation à ",seuil,"% est [",a,";",b,"]")
```

(Faire tourner le programme)

c) En utilisant cet algorithme montrer que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la loi binomiale B(100 ; 0,42) est l'intervalle [0,32 ; 0,52].

d) Que peut-on constater ?

3) Une société fabrique des boîtes en plastique de deux couleurs : des vertes et des bleues.
La fabrication est automatisée et la machine est réglée à un niveau de 42 % de boîtes vertes et 58 % de boîtes bleues, correspondant à la demande du marché.
Un test est fait sur un échantillon de 80 boîtes prélevées au hasard.

a) L'échantillon comporte autant de boîtes bleues que de boîtes vertes. La machine est-elle déréglée au seuil de 5 % ?

b) À partir de combien de boîtes bleues et de boîtes vertes obtenues sur un échantillon de 80 boîtes doit-on penser que la machine s'est déréglée ?

4) a) Que doit-on modifier dans l'algorithme pour avoir un test au seuil de 90 % ?

b) au seuil de 99 % ?

c) Faire tourner l'algorithme . Que peut-on constater ?