

# VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

## 1) DÉFINITION

### Définition :

Soit  $\Omega$  l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.

- On appelle **variable aléatoire** toute fonction  $X$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  qui, à tout élément de  $\Omega$ , fait correspondre un nombre réel  $x$ .
- L'événement de  $\Omega$ , noté  $\{X = x\}$ , est l'ensemble des éléments de  $\Omega$  qui ont pour image  $x$  par  $X$ .
- $X(\Omega)$ , l'ensemble image de  $\Omega$  par  $X$  est l'ensemble de toutes les images des éléments de  $\Omega$  par  $X$ . Cet ensemble est noté  $\Omega'$ .

Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction. Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.

En général, une variable aléatoire est notée  $X, Y, Z \dots$

### Exemple : Pour tout le Paragraphe

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

L'univers de cette expérience aléatoire est :  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

On peut, par exemple, définir une variable aléatoire  $X$  de la façon suivante :

- $X = 0$  si le nombre est pair
- $X = 1$  si le nombre est impair

L'ensemble image de  $\Omega$  par  $X$  est  $X(\Omega) = \Omega' = \{0; 1\}$

## 2) LOI DE PROBABILITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE (on dit aussi loi image de la variable aléatoire)

### Définition :

Soit  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité.

$\Omega' = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire  $X$ .

**La loi de probabilité** de  $X$  est la fonction définie sur  $\Omega'$ , qui à chaque  $x_i$  fait correspondre le nombre  $p_i' = P(X = x_i)$

On démontre facilement que

$$\sum_{i=1}^m P(X = x_i) = 1$$

### Exemple :

La loi de probabilité de la variable aléatoire définie ci-dessus est :

$x_i$	0	1
$p_i' = P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

## 3) ESPÉRANCE, VARIANCE, ÉCART TYPE

Si les issues d'une expérience aléatoire sont des nombres réels, on peut définir les nombres ci-dessous :

### Définition :

Soit  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité. On note  $p_i$  la probabilité de l'événement  $\omega_i$ .

- **L'espérance mathématique** de la loi de probabilité est le nombre  $\mu$  défini par :  $\mu = \sum_{i=1}^n p_i \omega_i$
- **La variance** de la loi de probabilité est le nombre  $V$  défini par :  $V = \sum_{i=1}^n p_i (\omega_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n p_i \omega_i^2 - \mu^2$
- **L'écart type** de la loi de probabilité est le nombre  $\sigma$  défini par :  $\sigma = \sqrt{V}$

### Preuve : formule de la variance

$$V = \sum_{i=1}^n p_i (\omega_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (p_i \omega_i^2 - 2 p_i \omega_i \mu + p_i \mu^2) = \sum_{i=1}^n p_i \omega_i^2 - 2 \mu \sum_{i=1}^n p_i \omega_i + \mu^2 \sum_{i=1}^n p_i$$

Or  $\mu = \sum_{i=1}^n p_i \omega_i$  et  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

On en déduit que  $V = \sum_{i=1}^n p_i \omega_i^2 - 2 \mu^2 + \mu^2 = \sum_{i=1}^n p_i \omega_i^2 - \mu^2$

### Définition :

L'espérance mathématique, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire  $X$  sont respectivement l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la loi de probabilité de  $X$  définie sur  $\Omega'$ .

Les notations respectives sont  $E(X)$ ,  $V(X)$  et  $\sigma(X)$ .

### Exemple :

$$E(X) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = \frac{1}{2} \times 0^2 + \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\sigma(X) = \frac{1}{2}$$

### Remarque :

On peut interpréter l'espérance comme étant la valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions.

**Propriété :**

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ . On a :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$

**Preuve :**

Soit  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité.

$\Omega' = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire  $X$ .

On a alors  $E(X) = \sum_{i=1}^m p_i' x_i$  et  $V(X) = \sum_{i=1}^m p_i' x_i^2 - E(X)^2$

$$\bullet \quad E(aX + b) = \sum_{i=1}^m p_i' (a x_i + b) = \sum_{i=1}^m (a p_i' x_i + b p_i') = \sum_{i=1}^m a p_i' x_i + \sum_{i=1}^m b p_i' = a \sum_{i=1}^m p_i' x_i + b \sum_{i=1}^m p_i'$$

$$\text{Or } E(X) = \sum_{i=1}^m p_i' x_i \text{ et } \sum_{i=1}^m p_i' = 1$$

On en déduit que  $E(aX + b) = aE(X) + b$

$$\bullet \quad \begin{aligned} V(aX + b) &= \sum_{i=1}^m p_i' (a x_i + b)^2 - E(aX + b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^m p_i' \times (a^2 x_i^2 + 2 a b x_i + b^2) - (aE(X) + b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^m (p_i' a^2 x_i^2 + p_i' 2 a b x_i + p_i' b^2) - (a^2 E(X)^2 + 2 a b E(X) + b^2) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^m p_i' x_i^2 + 2 a b \sum_{i=1}^m p_i' x_i + b^2 \sum_{i=1}^m p_i' - a^2 E(X)^2 - 2 a b E(X) - b^2 \end{aligned}$$

$$\text{Or } 2 a b \sum_{i=1}^m p_i' x_i = 2 a b E(X) \text{ et } b^2 \sum_{i=1}^m p_i' = b^2 \times 1 = b^2$$

$$\text{Ainsi } V(aX + b) = a^2 \left( \sum_{i=1}^m p_i' x_i^2 - E(X)^2 \right) + 2 a b E(X) + b^2 - 2 a b E(X) - b^2 = a^2 V(X)$$

**Remarque :**

Dans toutes les situations étudiées jusqu'à présent, la variable aléatoire  $X$  prend un nombre fini de valeurs. On dit que  $X$  est **discrète**.