Révisions

Ex 1: ***Univers***

Dans chacune de ces expériences aléatoires, donner les éléments de l'univers.
1) On jette un dé ordinaire, puis on note le chiffre qui apparaît.

2) On jette une pièce de monnaie et on note la face qui apparaît.

3) On tire une carte parmi les huit trèfles.

4) Une urne contient des boules blanches et des boules noires . On tire successivement sans remise deux boules de l'urne.

5) On lance deux dés tétraédriques bien équilibrés numérotés de 1 à 4.
On note les deux nombres obtenus.
Déterminer l'univers des expériences suivante :

a) On effectue la différence du plus grand par le plus petit.

b) On effectue la somme des deux nombres obtenus.

c) On effectue le produit des deux nombres obtenus.

Ex 2 : ***Vocabulaire et égalité importante***

On choisit au hasard un nombre entier entre 1 et 10.
On appelle :
- A l'**événement** « le nombre choisi est pair » ;
- B l'**événement** « le nombre choisi est inférieur ou égal à 7 ».

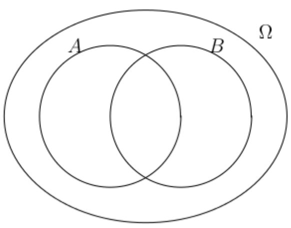
1) a) Donner $\mathrm{P}(A)$ c'est à dire la probabilité que le nombre choisi soit pair.
b) Donner $\mathrm{P}(B)$.

2) **Événement contraire** : par exemple l'événement contraire de B est « le nombre choisi n'est pas inférieur ou égal à 7 » et il s'écrit $\overline{B}$
a) Donner $\mathrm{P}(\overline{B})$
b) Décrire l'événement $\overline{A}$
c) Donner $\mathrm{P}(\overline{A})$
d) Quel est le lien entre la probabilité d'un événement et la probabilité de l'événement contraire ?

3) **Événement $A \cap B$** : cet événement signifie que les événements A et B se produisent simultanément
a) Décrire l'événement $A \cap B$.
b) Donner P ($A \cap B$).

4) **Événement $A \cup B$** : cet événement signifie que l'événement A se produit, ou B se produit ou les deux se produisent simultanément
a) Décrire l'événement $A \cup B$.
b) Donner P ($A \cup B$).

5) **Diagramme de Venn**
Le diagramme ci-dessous s'appelle un diagramme de Venn. Les événements A et B sont représentés par des disques et Ω est l'univers de cette expérience aléatoire, c'est à dire {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10}.
Placer dans ce schéma les nombres de 1 à 10.



6) **Une égalité importante en probabilité**
Écrire une égalité (une formule) qui donne le lien entre P ($A \cup B$), P ($A \cap B$), P (A) et P (B).

Ex 3 : ***Vrai ou faux***

1) La probabilité d'un événement peut être strictement supérieure à 1.

2) La probabilité d'un événement peut être nulle.

3) Un événement est toujours constitué d'événements élémentaires équiprobables.

4) La somme des probabilités de tous les événements élémentaires vaut 1.

5) La probabilité d'un événement peut être $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6) La probabilité d'un événement peut être $\sqrt{2}$.

7) Si deux événements A et B vérifient $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=1$, alors ils sont incompatibles.

8) Si deux événements A et B ont le même nombre d'événements élémentaires, alors $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$

9) Si deux événements A et B vérifient $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=1$, alors le contraire de A est B.

10) On lance quatre fois un dé et on note la fréquence d'apparition du 6.
Cette fréquence est la probabilité d'obtenir 6.

11) On lance dix mille fois un dé et on note la fréquence d'apparition du 6 . Cette fréquence est la probabilité d'obtenir un 6.

12) Il faut connaître toutes les issues pour pouvoir modéliser une expérience aléatoire.

Ex 4 : ***Diagramme de Venn***

Dans une classe de 30 élèves, 20 étudient l'anglais et 15 l'espagnol, et 8 étudient les deux langues.
On choisit un élève au hasard dans cette classe.
On appelle
• A l'événement « l'élève choisi étudie l'allemand »
• B l'événement « l'élève choisi étudie l'espagnol »

1) Tracer un diagramme de Venn , et le compléter avec des effectifs ou des probabilités.

2) Décrire l'événement $A \cup B$ par une phrase.

3) Calculer P ($A \cup B$).

Ex 5 : ***Tableau à double entrée***

Dans une classe de 31 élèves, il y a 16 filles, et parmi elles 4 filles font de l'allemand. Dans cette classe, 11 élèves font de l'allemand. Les autres font de l'espagnol.
On choisit un élève au hasard. Écrire les probabilités demandées sous forme de fraction.
On appelle
• A l'événement « l'élève choisi étudie l'allemand »
• F l'événement « l'élève choisi est une fille »

1) Décrire l'événement $\overline{A}$ et calculer sa probabilité.
2) Décrire l'événement $\overline{F}$ et calculer sa probabilité.
3) Décrire l'événement P ($A \cap F$) et calculer sa probabilité.

4) Compléter le tableau ci-dessous par des probabilités sous forme de fractions.

	A	$\overline{A}$	Total
F			
$\overline{F}$			
Total			

5) Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit un garçon qui fait de l'espagnol ?

Ex 6 : ***Arbre***

On lance une pièce de monnaie deux fois de suite.

1) Tracer un arbre pour indiquer toutes les possibilités.

2) Toutes ces possibilités ont la même probabilité.

a) Déterminer la probabilité d'obtenir deux fois pile.

b) Déterminer la probabilité d'obtenir une seule fois pile.

Ex 7 : P ($A \cup B$) ...

Dans une assemblée, 30 % des personnes boivent du thé, 80 % du café, et 95 % boivent du thé ou du café (ou les deux). On choisit une personne au hasard.
Calculer la probabilité que cette personne boive du thé et du café.

Ex 8 : ***Événements incompatibles***

On jette deux dés bien équilibrés . On considère les événements suivants :
A : « le produit des deux nombres affichés est impair »
B : « la somme des deux nombres affichés est impaire »
C : « le plus petit des deux nombres affichés est pair »

1) Les deux événements A et B sont-ils incompatibles ?

2) Les deux événements A et C sont-ils incompatibles ?

3) Les deux événements B et C sont-ils incompatibles ?

Ex 9 : ***Événement contraire***

On jette deux dés et on calcule le produit des deux nombres obtenus.
On considère l'événement A : « le produit des deux nombres affichés est pair »
1) Énoncer l'événement contraire $\overline{A}$, puis calculer la probabilité $P(\overline{A})$

2) En déduire $\mathrm{P}(A)$.

3) Énoncer l'événement A en utilisant dans la phrase :

a) « au moins un » b) « ou »

Variables aléatoires

Ex 10 : ***Vrai ou faux : restituer les notions du cours***

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω .

1) Une variable aléatoire est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

2) Une variable aléatoire ne prend que des valeurs entières.

3) Une variable aléatoire ne prend que des valeurs comprises entre 0 et 1.

4) Les ensembles Ω et $X(\Omega)$ ont le même nombre d'éléments.

5) Si x_1 et x_2 sont deux valeurs distinctes prises par une variable aléatoire X, alors les événements ($X=x_1$) et ($X=x_2$) sont incompatibles.

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur Ω .

6) La loi de probabilité de X est une fonction définie sur Ω .

7) Le tableau de valeurs ci-dessous est celui de la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	-0,15	0,2	0,3	14
$P(X=x_i)$	0,2	0,4	0,1	0,3

8) Le tableau de valeurs ci-dessous est celui de la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	0,005	0,2	3,7	14
$P(X=x_i)$	0,2	0,4	0,15	0,3

9) On peut définir sur Ω une infinité de variables aléatoires.

10) Les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ ont le même nombre d'éléments.

11) Si on appelle x_i les valeurs prises par X et y_j les valeurs prises par Y, alors $\Sigma P(X=x_i)=\Sigma P(Y=y_j)$

Ex 11 : ***Définir plusieurs variables aléatoires à partir d'une expérience***

On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie.
Déterminer, à partir de cette expérience aléatoire, deux variables aléatoires ainsi que les ensembles des valeurs prises par ces variables aléatoires.

Ex 12 : ***Déterminer la loi d'un variable aléatoire***

On choisit aléatoirement un entier compris entre 1 et 20 :
- s'il est premier on gagne 3 euros.
- si c'est un multiple de 4, on gagne un euro.
- sinon, on perd deux euros.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Ex 13 : ***Représenter graphiquement une variable aléatoire***

Une urne contient deux boules blanches et une boule rouge.
On tire deux boules de l'urne successivement et avec remise . On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Représenter graphiquement X.

3) Reprendre les questions dans le cas de tirages sans remise.

Ex 14 : ***Représenter graphiquement une variable aléatoire***

On lance deux dés tétraédriques numérotés de 1 à 4.
On appelle X la variable aléatoire égale à la somme des résultats des deux dés.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Représenter graphiquement X.

Ex 15 : ***Déterminer la loi d'un variable aléatoire***

Un élève peu sérieux répond de façon aléatoire « vrai ou faux » à un questionnaire comportant trois questions.
Chaque réponse juste rapporte deux points et chaque réponse fausse fait perdre un point . Le total des points de l'exercice est ramené à 0 s'il est négatif . On appel X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par l'élève peu sérieux . Déterminer la loi de probabilité de X .

Ex 16 : ***Espérance, variance et écart type***

Une variable aléatoire X admet la loi de probabilité suivante :

x_i	-2,1	-0,8	3,4	5,7	8
$P(X=x_i)$	0,24	0,17	0,35	0,09	0,15

Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de X.

Ex 17 : ***Définir une variable aléatoire d'espérance donnée***

1) a) Définir une variable aléatoire X prenant les valeurs 0 , 2 et 5 dont l'espérance est 2.

b) Peut-on définir une variable aléatoire X prenant les valeurs 0 , 2 et 5 dont l'espérance est 0 ?

2) Définir sur deux variables aléatoires X et Y prenant les valeurs -3 , 0 , 1 et 2 dont l'espérance est nulle . X et Y ont-elles même variance ?

Ex 18 : ***Tirages avec et sans remise – schémas à cases***

Une urne contient deux boules bleues et trois boules vertes . On tire deux boules de l'urne successivement et avec remise . On appelle X la variable aléatoire égale à 5 si les deux boules sont de la même couleur et égale à -3 si les boules sont de couleurs différentes.

1) Déterminer la loi de probabilité de X .

2) Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de X.

3) Reprendre les questions précédentes en considérant des tirages sans remise . On note Y la nouvelle variable aléatoire . Comparer X et Y .

Ex 19 : ***Jeu favorable ou pas, jeu équitable* -V(aX+b)**

La roue d'une loterie comporte 10 secteurs identiques dont 4 rapportent 1 euro, 5 rapportent 3 euros et 1 rapporte 10 euros.
Le joueur doit miser 3 euros avant de lancer la roue.

1) Le jeu est-il favorable au joueur ?
(On note X la variable aléatoire utilisée)

2) Déterminer le montant de la mise pour que le jeu soit équitable.
(On note Y la variable aléatoire utilisée)

3) Exprimer Y en fonction de X.

4) Avec cette nouvelle mise, les gains du jeu sont-ils plus dispersés qu'avant ou non ?

Exercice 20 : ***Jeux équitables* - V(aX+b)**

On joue à « pile ou face » et on considère deux règles de jeu différentes.

- Règle 1 : si on obtient face on gagne 1 euro sinon on perd 1 euro

- Règle 2 : si on obtient face on gagne 1000 euros sinon on perd 1000 euros

1) Justifier que ces deux jeux sont équitables.
(On note X et Y les variables aléatoires utilisées)

2) Exprimer Y en fonction de X.

3) Auquel des deux jeux joueriez-vous ?
Quel calcul permet de mesurer le risque ?

Algorithmes

Ex 21 : ***Simuler une expérience aléatoire***

```
fonction nombre_jets :
 x ← 0
 s ← 0
 Tant que (s<10) faire
     t ← randint(1,6)
     s ← s+t
     x ← x+1
 Fin tant que
 retourner x
fin fonction
```

1) Quelle expérience aléatoire est simulée par l'algorithme ci-dessus et comment est définie la variable aléatoire X ?

2)

<table>
<tr><th>Algorithme</th><th>Programme en Python</th></tr>
<tr><td><pre>Afficher ("Nombre de simulations :")
Lire n

Pour i allant de 2 à 10

     c[i] ← ....

Fin pour
Pour i allant de 1 à ....

     x ← nombre_jets

     c[x] ← ....

Fin pour
Pour i allant de 2 à 10

     f[i] ← ....

     Afficher ("f[",i,"]=",f[i]))

Fin pour

E ← ....

Pour i allant de 1 à ....

      E ← ....

Fin pour

Afficher ("L'espérance est environ : "),E)</pre></td><td><pre>from random import randint

def nb_jets():
   x=0
   s=0
   while (s<10) :
      t=randint(1,6)
      s=s+t
      x=x+1
   return(x)

c=[]
f=[]
n=int(input("Nombre de simulations :"))
for i in range(0,11):
   c.append(0)
   f.append(0)
for i in range (1,n+1):
   x=nb_jets()
   c[x]=c[x]+1
for i in range(2,11):
   f[i]=c[i]/n
   print("P(X=",i,")=",f[i])
E=0
for i in range(2,11):
   E=E+i*f[i]
print ("L'espérance est environ",E)

(Faire tourner le programme)
(Avec Algobox)</pre></td></tr>
</table>

Compléter l'algorithme précédent pour qu'il simule n fois l'expérience précédente et permette de compléter le tableau suivant :

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x=i)$									

Les fréquences ont tendance à se stabiliser pour n suffisamment grand .

Comment se nomme ce phénomène ?

Que calcul aussi cet algorithme ?

3) Inventer une règle du jeu à partir de cette expérience telle que, d'après les simulations précédentes, le jeu soit favorable au joueur.

Ex 22 : ***Un paradoxe historique***
(consulter probabilites_calc.22.ods)

À la cours de Florence au XVI^{e} siècle, le Duc de Toscane fin observateur remarque que lorsque l'on lance trois dés et que l'on fait la somme des 3 résultats, la somme 10 apparaît plus fréquemment que la somme 9, alors que 9 et 10 se décomposent tous deux en six sommes de trois entiers compris entre 1 et 6.

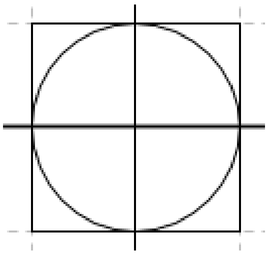
1) Vérifier les dires du Duc de Toscane sur la décomposition de 9 et 10.

2) A l'aide d'un algorithme ou d'un tableur, calculer les fréquences d'apparition des sommes 9 et 10 sur un grand nombre de lancers de trois dés.

3) Expliquer le paradoxe.

Ex 23 : ***Méthode de Monte Carlo – utilisation d'un tableur***
(consulter probabilites_calc16.ods – fichier de la fiche de seconde sur les probabilités)

On tire des fléchettes de façon aléatoire dans une cible carrée contenant un cercle de rayon 1 . On suppose qu'on atteint toujours la cible.
On simule le lancer d'une fléchette.



	A	B	C	D	E	F	G
1	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
2							
3							
4	Tirage	Abscisse	Ordonnée	Distance à 0	Dans le disque	Nombre de tirs	Fréquence
5							
6							

1) a) Mettre les numéros des tirages de 1 à 10000 dans les cellules A5 à A10004

b) L'abscisse du point d'impact de la fléchette est un nombre réel aléatoire entre -1 et 1. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule B5 ?

c) Effectuer la même opération pour l'ordonnée en C5.

d) Trouver la formule de la cellule D5 qui permet d'afficher la distance d entre l'origine et le point d'impact.

2) a) Si la distance d est inférieure à 1, où se trouve le point d'impact ?
Si $d \leqslant 1$, faire inscrire « 1 » dans la cellule B5 . Effectuer le total de tirs dans le disque dans la cellule F5.

b) Calculer la fréquence de tirs dans le disque en cellule G5.

3) a) En cellule A2 coller avec liaison la fréquence obtenue après 4000 tirs ; en B2, après 5000 tirs jusqu'en G2 après 10000 tirs.

b) Sélectionner la plage G5:G10004 puis, à l'aide de l'assistant graphique, représenter les fréquences cumulées de tirs dans le disque en fonction du nombre de tirs.

c) On suppose que la probabilité d'atteindre une surface est proportionnelle à l'aire de la surface.

Quelle est la probabilité d'atteindre le disque dans le carré ? Que permet de « calculer » cette simulation ?