10 : LA FONCTION EXPONENTIELLE - L'ESSENTIEL DU COURS

Il existe d'autres propriétés qui seront étudiées en terminale.

Définition et notation :

Il existe **une unique** fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que : $f'=f$ et $f(0)=1$

Cette fonction, notée $\exp$, est appelée **fonction exponentielle**

Attention :
il y a deux conditions

Notation e^x :

On conviendra de noter pour tout réel x : $\exp(x)=e^x$ où $e=\exp(1)\approx 2{,}718$

La fonction exponentielle est alors définie par :

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^x$$

Propriétés algébriques :

Pour tous réels a et b, on a :

- $e^{a+b}=e^a e^b$

  On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $e^b \neq 0$ et $e^{-b}=\dfrac{1}{e^b}$
- $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$
- Si n est un entier relatif : $e^{na}=\left(e^a\right)^n$

Lien avec les suites géométriques :

Pour tout réel a, la suite $\left(e^{na}\right)$ est une suite géométrique de raison e^a.

Outil de passage du discret au continu, la fonction exponentielle permet de modéliser de nombreuses évolutions dans des domaines très variés : calculs d'intérêts, dilution d'une solution, décroissance radioactive ...

Étude de la fonction exponentielle :

Pour tout réel x, $e^x>0$. La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle croît très vite (par exemple : $e^{50}\approx 5\times 10^{21}$)

*Dans le langage courant, on parle souvent de phénomènes à "**croissance exponentielle**", pour indiquer que la croissance de ces phénomènes est très rapide. C'est le cas en ce moment avec la covid-19.*

Conséquences :

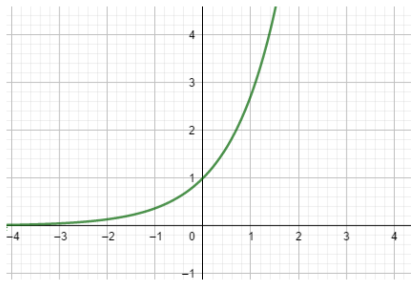
Pour tous réels a et b

- $a=b \Leftrightarrow e^a=e^b$
- $a<b \Leftrightarrow e^a<e^b$
- $a\leqslant b \Leftrightarrow e^a\leqslant e^b$
- $a>0 \Leftrightarrow e^a>1$
- $a<0 \Leftrightarrow 0<e^a<1$

Représentation graphique :

- La courbe passe par les points de coordonnées (0;1) et (1; e)

- La courbe est entièrement située au-dessus de l'axe des abscisses et ne le coupe jamais.



Fonction du type :

$x \longmapsto e^{ax+b}$

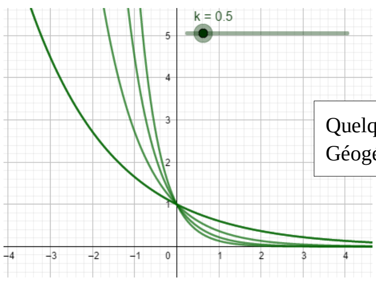
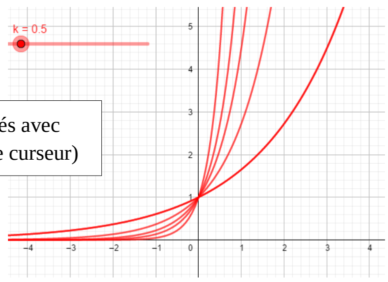
Soit a et b deux réels.

La fonction f : $x \longmapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a :

$$f'(x)=ae^{ax+b}$$

Exemples importants :

Soit k un réel strictement positif.

$f_k : x \longmapsto e^{-kx}$	$g_k : x \longmapsto e^{kx}$
	
Décroissance exponentielle	**Croissance exponentielle**

Quelques exemples générés avec Géogébra (en modifiant le curseur)