- LA FONCTION EXPONENTIELLE - MATH PREMIÈRE SPÉ chapitre 10 : L'ESSENTIEL DU COURS

Il existe d'autres propriétés qui seront étudiées en terminale.

Définition et notation :

Il existe **une unique** fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$

Cette fonction, notée exp, est appelée **fonction exponentielle**

Attention : il y a deux conditions

Notation e^x :

On conviendra de noter pour tout réel x : $\exp(x) = e^x$ où $e = \exp(1) \approx 2{,}718$

La fonction exponentielle est alors définie par :

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^x$$

Propriétés algébriques :

Pour tous réels a et b, on a :

- $e^{a+b} = e^a e^b$
  On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $e^b \neq 0$ et $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- Si n est un entier relatif : $e^{na} = (e^a)^n$

Lien avec les suites géométriques :

Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a.

Outil de passage du discret au continu, la fonction exponentielle permet de modéliser de nombreuses évolutions dans des domaines très variés : calculs d'intérêts, dilution d'une solution, décroissance radioactive ...

Étude de la fonction exponentielle :

Pour tout réel x, $e^x > 0$. La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle croît très vite (par exemple : $e^{50} \approx 5 \times 10^{21}$)

*Dans le langage courant, on parle souvent De phénomènes à "**croissance exponentielle**", pour indiquer que la croissance de ces phénomènes est très rapide.*
C'est le cas en ce moment avec la covid-19.

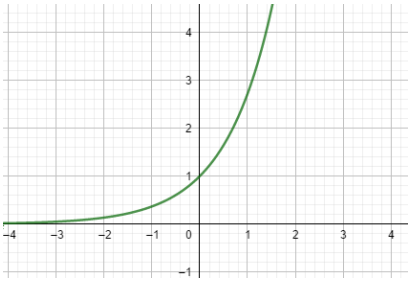
Conséquences :

Pour tous réels a et b

- $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$
- $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$
- $a \leqslant b \Leftrightarrow e^a \leqslant e^b$
- $a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$
- $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$

Représentation graphique :

- La courbe passe par les points de coordonnées (0;1) et (1; e)
- La courbe est entièrement située au-dessus de l'axe des abscisses et ne le coupe jamais.



Fonction du type :

$x \longmapsto e^{ax+b}$

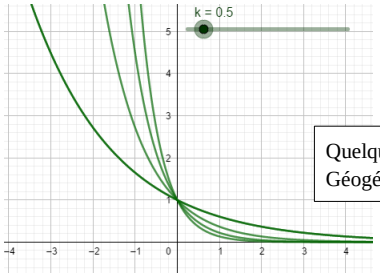
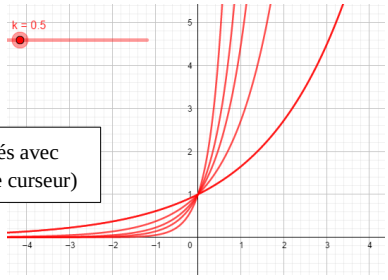
Soit a et b deux réels.

La fonction $f : x \longmapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = ae^{ax+b}$$

Exemples importants :

Soit k un réel strictement positif.

$f_k : x \longmapsto e^{-kx}$	$g_k : x \longmapsto e^{kx}$
	
Décroissance exponentielle	**Croissance exponentielle**

Quelques exemples générés avec Géogébra (en modifiant le curseur)