SECOND DEGRÉ

1) TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

A) DÉFINITION

Définition :

On appelle fonction **polynôme du second degré**, ou **trinôme du second degré** toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$x \longmapsto ax^2 + bx + c \text{ où } a,\ b \text{ et } c \text{ sont des réels et } a \neq 0.$$

- On dit que a est le coefficient de x^2, b le coefficient de x et c le terme constant.
- Un polynôme du second degré est toujours défini sur $\mathbb{R}$; il n'est donc pas nécessaire de le répéter systématiquement.

Exemples :

- Les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ sont des trinômes du second degré :

- La fonction $x \longmapsto (x+1)^2 - (x-1)^2$ n'est pas un trinôme du second degré car pour tout réel x,

B) FORME CANONIQUE *(retenir la méthode)*

Propriété :

Tout trinôme du second degré $f :\ x \longmapsto ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous **forme canonique** :

$$f :\ x \longmapsto a(x-\alpha)^2 + \beta \text{ où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = P(\alpha).$$

On note souvent P ou Q un trinôme du second degré.
(Notation que j'utiliserai en exercice)

Preuve :

Soit un trinôme du second degré f tel que $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Comme $a \neq 0$, pour tout réel x : $\quad ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$.

Or $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

Donc: $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$= a(x-\alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Remarque : le réel $b^2 - 4ac$ se note Δ (delta) et s'appelle **le discriminant du trinôme**.

Exemple : Forme canonique de $2x^2 + 4x + 1$

Pour tout réel x, on a :

C) VARIATIONS ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Étude d'un exemple : Variations de $f :\ x \longmapsto 2x^2 + 4x + 1$

On a vu que pour tout réel x, $f(x) = 2(x+1)^2 - 1$

Soit deux réels u et v tels que $u < v \leqslant -1$. On a alors :

Soit deux réels u et v tels que $-1 \leqslant u < v$. On a alors :

En généralisant ce raisonnement à un trinôme quelconque $f :\ x \longmapsto ax^2 + bx + c$ que nous démontrerons plus tard de manière plus simple, on obtient le résultat suivant :

$a > 0$

x	
f	

Les branches de la parabole sont dirigées vers le haut.

$a < 0$

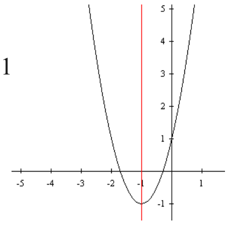
x	
f	

Les branches de la parabole sont dirigées vers le bas.

Remarques :

- La représentation graphique dans un repère orthogonal est une parabole , dont le sommet est
- La droite d'équation

$y = 2x^2 + 4x + 1$



$y = -0{,}5x^2 + 2x + 2$

2) ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ ET FACTORISATION

A) DÉFINITION

Définition :

Une **équation du second degré à une inconnue** x est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (où a , b et c sont des réels et $a \neq 0$)

Soit le trinôme du second degré $f :\ x \longmapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ ($a \neq 0$)
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ s'écrit aussi $f(x) = 0$.
Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$, c'est trouver tous les réels u qui vérifient $f(u) = 0$. Ces solutions sont appelées **racines** du trinôme f .

B) RÉSOLUTION

$a \neq 0$, donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Il y a alors **3 cas distincts qui dépendent du signe du discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta < 0$, $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ et alors l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, puisqu'un carré n'est jamais négatif.
Si $\Delta = 0$, $\frac{\Delta}{4a^2} = 0$ et l'équation équivaut alors à : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$ L'équation a donc une unique solution dans $\mathbb{R}$: $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
Si $\Delta > 0$, $\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et l'équation équivaut alors à : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ ou $x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ L'équation a donc deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemples : Résoudre les équations ci-dessous

- $x^2 - 3x + 4 = 0$ ($a = 1$; $b = -3$ et $c = 4$)

- $2x^2 - 12x + 18 = 0$ ($a = 2$; $b = -12$ et $c = 18$)

- $6x^2 - x - 1 = 0$ ($a = 6$; $b = -1$ et $c = -1$)

Remarques :

- Il n'est pas toujours utile de calculer le discriminant. **Exemples :** $4x^2-9=0$, $5x^2-4x=0$, …
- **Lorsque a et c sont de signes contraires** $-4ac>0$ donc $\Delta>0$ et l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes.

On montre facilement la propriété suivante :

Propriété :

Lorsque l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux racines x_1 et x_2 , alors : $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$ et $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Applications :

- Vérifier le calcul des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

- Trouver une racine connaissant l'autre . (**Méthode de la racine évidente**)

Exemple :

- Déterminer le signe des racines sans en connaître les valeurs.

Remarque : Deux nombres réels ont pour produit P et pour somme S si ,et seulement si, ils sont solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$

C) FACTORISATION DU TRINÔME ax^2+bx+c

On a déjà montré que pour tout réel x de $\mathbb{R}$: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$. Trois cas se présentent donc :

Si $\Delta<0$, le trinôme n'a pas de racine, il est donc inutile d'espérer factoriser ce trinôme en produit de polynômes du premier degré.
Si $\Delta=0$, $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ et $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ est **la racine double** du trinôme.
Si $\Delta>0$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.

Exemples : Factoriser les trinômes ci-dessous

- x^2-3x+4
- $2x^2-12x+18$
- $6x^2-x-1=$

3) SIGNE DU TRINÔME ax^2+bx+c

➔ Si $\Delta>0$, $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
On a :

x			
$x-x_1$ $x-x_2$ $(x-x_1)(x-x_2)$			

si $a>0$

x	
$a(x-x_1)(x-x_2)$	

si $a<0$

x	
$a(x-x_1)(x-x_2)$	

Pour résumer : ax^2+bx+c est du signe de a sauf entre ses racines.

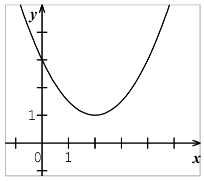
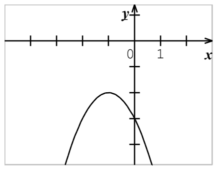
➔ Si $\Delta \leqslant 0$, on a $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ (forme canonique).

- Si $\Delta<0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ et donc $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x.
- Si $\Delta=0$, $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ et $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ donc $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \neq -\frac{b}{2a}$ et $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=0$.

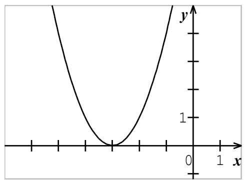
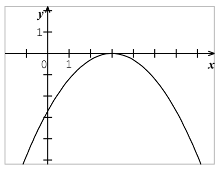
Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)<0$ avec $f(x)=2x^2+5x-3$

4) RÉCAPITULATIF ET LIENS AVEC LES REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

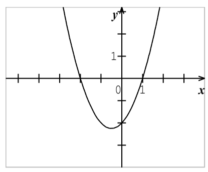
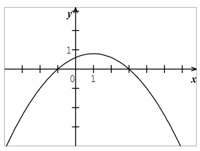
<table>
<tr><th></th><th>Équation
$ax^2+bx+c=0$
Factorisation</th><th>Inéquation
$ax^2+bx+c>0$</th><th>Inéquation
$ax^2+bx+c<0$</th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Le trinôme ax^2+bx+c ne se factorise pas</td><td>L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$.</td><td>L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.</td><td></td></tr>
<tr><td>L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.</td><td>L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">L'équation $ax^2+bx+c=0$ a une solution (double) dans $\mathbb{R}$.

Cette solution est:
$x_0=-\frac{b}{2a}$

Le trinôme ax^2+bx+c se factorise:
$a(x-x_0)^2$</td><td>L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de x_0.</td><td>L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.</td><td></td></tr>
<tr><td>L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.</td><td>L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de x_0 .</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

Ces solutions sont:
$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
et
$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Le trinôme ax^2+bx+c se factorise :
$a(x-x_1)(x-x_2)$</td><td>L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
a pour ensemble de solutions
$]-\infty\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[$</td><td>L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
a pour ensemble de solutions
$]x_1\,;x_2[$</td><td></td></tr>
<tr><td>L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
a pour ensemble de solutions
$]x_1\,;x_2[$</td><td>L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
a pour ensemble de solutions
$]-\infty\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[$</td><td></td></tr>
</table>