SECOND DEGRÉ

1) TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

A) DÉFINITION

Définition :

On appelle fonction **polynôme du second degré**, ou **trinôme du second degré** toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$x \longmapsto ax^2 + bx + c \text{ où } a,\ b \text{ et } c \text{ sont des réels et } a \neq 0.$$

- On dit que a est le coefficient de x^2, b le coefficient de x et c le terme constant.
- Un polynôme du second degré est toujours défini sur $\mathbb{R}$; il n'est donc pas nécessaire de le répéter systématiquement.

Exemples :

- Les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ sont des trinômes du second degré :
  $x \longmapsto 3x^2 + 2x + 3$; $x \longmapsto 4x^2$ et $x \longmapsto 6x^2 - 2$.
- La fonction $x \longmapsto (x+1)^2 - (x-1)^2$ n'est pas un trinôme du second degré car pour tout réel x, $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$.

B) FORME CANONIQUE *(retenir la méthode)*

Propriété :

Tout trinôme du second degré $f :\ x \longmapsto ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous **forme canonique** :

$$f :\ x \longmapsto a(x-\alpha)^2 + \beta \text{ où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = P(\alpha).$$

On note souvent P ou Q un trinôme du second degré.
(Notation que j'utiliserai en exercice)

Preuve :

Soit un trinôme du second degré f tel que $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$.

Comme $a \neq 0$, pour tout réel x : $\quad ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$.

Or $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

Donc: $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$= a(x-\alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Remarque : le réel $b^2 - 4ac$ se note Δ (delta) et s'appelle **le discriminant du trinôme**.

Exemple : Forme canonique de $2x^2 + 4x + 1$

Pour tout réel x, on a : $2x^2 + 4x + 1 = 2\left(x^2 + 2x + \frac{1}{2}\right) = 2\left((x+1)^2 - 1 + \frac{1}{2}\right) = 2\left((x+1)^2 - \frac{1}{2}\right) = 2(x+1)^2 - 1$

C) VARIATIONS ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Étude d'un exemple : Variations de $f :\ x \longmapsto 2x^2 + 4x + 1$

On a vu que pour tout réel x, $f(x) = 2(x+1)^2 - 1$

Soit deux réels u et v tels que $u < v \leqslant -1$. On a alors :

$u + 1 < v + 1 \leqslant 0$

$\Rightarrow (v+1)^2 < (u+1)^2$ (car la fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}^-$)

$\Rightarrow 2(v+1)^2 < 2(u+1)^2$

$\Rightarrow 2(v+1)^2 - 1 < 2(u+1)^2 - 1$

$\Rightarrow f(v) < f(u)$

La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty ; -1]$

Soit deux réels u et v tels que $-1 \leqslant u < v$. On a alors :

$0 \leqslant u + 1 < v + 1$

$\Rightarrow (u+1)^2 < (v+1)^2$ (car la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$)

$\Rightarrow 2(u+1)^2 < 2(v+1)^2$

$\Rightarrow 2(u+1)^2 - 1 < 2(v+1)^2 - 1$

$\Rightarrow f(u) < f(v)$

La fonction f est donc croissante sur $[-1 ; +\infty[$

En généralisant ce raisonnement à un trinôme quelconque $f :\ x \longmapsto ax^2 + bx + c$ que nous démontrerons plus tard de manière plus simple, on obtient le résultat suivant :

$a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		↘	β	↗	

Les branches de la parabole sont dirigées vers le haut.

$a < 0$

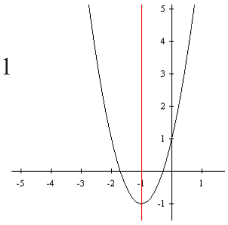
x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		↗	β	↘	

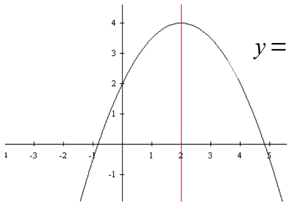
Les branches de la parabole sont dirigées vers le bas.

Remarques :

- La représentation graphique dans un repère orthogonal est une parabole , dont le sommet est $S\left(\frac{-b}{2a}\,;\,f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.
- La droite d'équation $x=-\frac{b}{2a}$ est un axe de symétrie de de la parabole .

$y=2x^2+4x+1$





$y=-0{,}5\,x^2+2\,x+2$

2) ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ ET FACTORISATION

A) DÉFINITION

Définition :

Une **équation du second degré à une inconnue** x est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$ (où a, b et c sont des réels et $a\neq 0$)

Soit le trinôme du second degré $f:\ x\longmapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ ($a\neq 0$)
L'équation $ax^2+bx+c=0$ s'écrit aussi $f(x)=0$.
Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$, c'est trouver tous les réels u qui vérifient $f(u)=0$. Ces solutions sont appelées **racines** du trinôme f .

B) RÉSOLUTION

$a\neq 0$, donc pour tout réel $x\in\mathbb{R}$:

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

Il y a alors **3 cas distincts qui dépendent du signe du discriminant** $\Delta=b^2-4ac$.

Si $\Delta<0$, $\frac{\Delta}{4a^2}<0$ et alors l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, puisqu'un carré n'est jamais négatif.
Si $\Delta=0$, $\frac{\Delta}{4a^2}=0$ et l'équation équivaut alors à : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$ L'équation a donc une unique solution dans $\mathbb{R}$: $x_0=-\frac{b}{2a}$.
Si $\Delta>0$, $\frac{\Delta}{4a^2}>0$ et l'équation équivaut alors à : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0 \Leftrightarrow x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ ou $x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ L'équation a donc deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemples : Résoudre les équations ci-dessous

- $x^2-3x+4=0$ ($a=1$; $b=-3$ et $c=4$)
  $\Delta=(-3)^2-4\times1\times4=9-16=-7$, $\Delta<0$, donc le trinôme x^2-3x+4 n'a pas de racine.
  L'équation n'a donc pas de solution dans $\mathbb{R}$: $S=\varnothing$.

- $2x^2-12x+18=0$ ($a=2$; $b=-12$ et $c=18$)
  $\Delta=(-12)^2-4\times2\times18=144-144=0$, $\Delta=0$ donc le trinôme $2x^2+12x+18=0$ a une seule racine: $x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{12}{2\times2}=3$.
  L'équation a donc une unique solution dans $\mathbb{R}$: $S=\{3\}$.

- $6x^2-x-1=0$ ($a=6$; $b=-1$ et $c=-1$)
  $\Delta=(-1)^2-4\times6\times(-1)=1+24=25=5^2$, $\Delta>0$ donc le trinôme $6x^2-x-1=0$ a deux racines:
  $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-5}{2\times6}=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+5}{2\times6}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.
  L'équation a donc deux solutions dans $\mathbb{R}$: $S=\left\{-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{2}\right\}$

Remarques :

- Il n'est pas toujours utile de calculer le discriminant. **Exemples :** $4x^2-9=0$, $5x^2-4x=0$, …
- **Lorsque a et c sont de signes contraires** $-4ac>0$ donc $\Delta>0$ et l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes.

On montre facilement la propriété suivante :

Propriété :

Lorsque l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux racines x_1 et x_2 , alors :

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Applications :

- Vérifier le calcul des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$.
- Trouver une racine connaissant l'autre . (**Méthode de la racine évidente**)

Exemple : $x_1=1$ est une solution évidente de $2x^2-5x+3=0$, donc l'autre racine vérifie $x_1x_2=\frac{3}{2}$ et donc $x_2=\frac{3}{2}$

- Déterminer le signe des racines sans en connaître les valeurs.

Remarque : Deux nombres réels ont pour produit P et pour somme S si ,et seulement si, ils sont solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$

C) FACTORISATION DU TRINÔME ax^2+bx+c

On a déjà montré que pour tout réel x de $\mathbb{R}$: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$. Trois cas se présentent donc :

Si $\Delta<0$, le trinôme n'a pas de racine, il est donc inutile d'espérer factoriser ce trinôme en produit de polynômes du premier degré.
Si $\Delta=0$, $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ et $x_0=-\frac{b}{2a}$ est **la racine double** du trinôme.
Si $\Delta>0$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.

Exemples : Factoriser les trinômes ci-dessous

- x^2-3x+4 n'est pas factorisable.
- $2x^2-12x+18=2(x-3)^2$ (ce qui aurait pu se déterminer grâce aux identités remarquables...)
- $6x^2-x-1=6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(3x+1)(2x-1)$

3) SIGNE DU TRINÔME ax^2+bx+c

➔ Si $\Delta>0$, $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
On a :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

si $a>0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$a(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

si $a<0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$a(x-x_1)(x-x_2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

<u>Pour résumer :</u> ax^2+bx+c **est du signe de** a **sauf entre ses racines.**

➔ Si $\Delta \leqslant 0$, on a $f(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$ (forme canonique).

- Si $\Delta < 0$, $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$ et donc $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x.
- Si $\Delta = 0$, $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ et $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ donc $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \neq -\dfrac{b}{2a}$ et $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=0$.

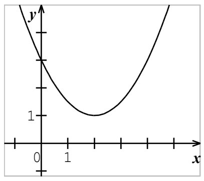
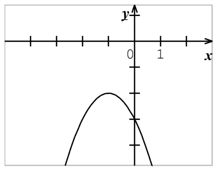
<u>Exemple :</u> Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)<0$ avec $f(x)=2x^2+5x-3$

$\Delta = 49$ ($\Delta > 0$) ; les solutions de l'équation $2x^2+5x-3=0$ sont donc $x_1=-3$ et $x_2=\dfrac{1}{2}$

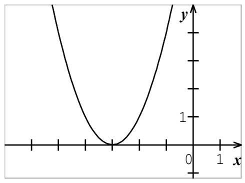
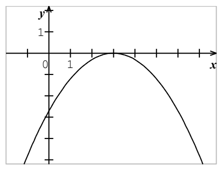
Or $f(x)$ est du signe de $a=2$ sauf entre les racines . Ainsi l'ensemble des solutions est $S=\left]-3\,;\dfrac{1}{2}\right[$

4) RÉCAPITULATIF ET LIENS AVEC LES REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

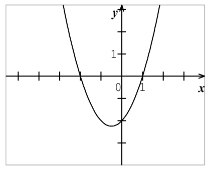
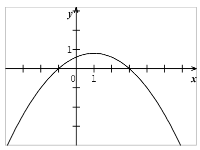
<table>
<tr><th></th><th>Équation
$ax^2+bx+c=0$
Factorisation</th><th>Inéquation
$ax^2+bx+c>0$</th><th>Inéquation
$ax^2+bx+c<0$</th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta < 0$</td><td rowspan="2">L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Le trinôme ax^2+bx+c ne se factorise pas</td><td>Si $a>0$
L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$.</td><td>Si $a>0$
L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.</td><td></td></tr>
<tr><td>Si $a<0$
L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.</td><td>Si $a<0$
L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta = 0$</td><td rowspan="2">L'équation $ax^2+bx+c=0$ a une solution (double) dans $\mathbb{R}$.

Cette solution est:
$x_0=-\dfrac{b}{2a}$

Le trinôme ax^2+bx+c se factorise:
$a(x-x_0)^2$</td><td>Si $a>0$
L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de x_0.</td><td>Si $a>0$
L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.</td><td></td></tr>
<tr><td>Si $a<0$
L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.</td><td>Si $a<0$
L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de x_0 .</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta > 0$</td><td rowspan="2">L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

Ces solutions sont:
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
et
$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Le trinôme ax^2+bx+c se factorise :
$a(x-x_1)(x-x_2)$</td><td>Si $a>0$
L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
a pour ensemble de solutions
$]-\infty\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[$</td><td>Si $a>0$
L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
a pour ensemble de solutions
$]x_1\,;x_2[$</td><td></td></tr>
<tr><td>Si $a<0$
L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
a pour ensemble de solutions
$]x_1\,;x_2[$</td><td>Si $a<0$
L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
a pour ensemble de solutions
$]-\infty\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[$</td><td></td></tr>
</table>