

Nombre dérivé :

Le nombre dérivé est noté $f'(a)$, et on a :

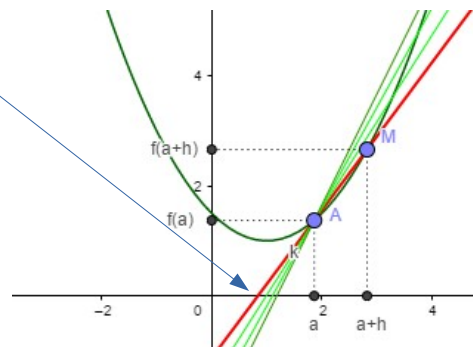
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ (si la limite existe, on dit alors que } f \text{ est dérivable en } a \text{)}$$

Interprétation géométrique :

Le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

La tangente à C_f au point A se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes (AM) lorsque M tend vers A en restant sur la courbe. (h tend vers 0)

Si f est dérivable en a , la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur $f'(a)$, et passe par A .



Équation de la tangente :
au point $A(a; f(a))$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \text{ (Si } f \text{ est dérivable en } a \text{)}$$

Cas particuliers:

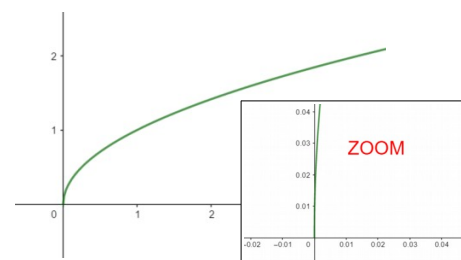
• Si $f'(a) = 0$, C_f admet au point d'abscisse a une **tangente horizontale** d'équation $y = f(a)$.

Fonction non dérivable :

• Si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty$ (ou $-\infty$), f n'est pas dérivable en a

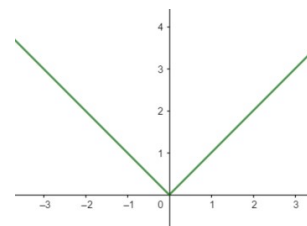
C_f admet une **tangente verticale** d'équation $x = a$.

Exemple classique de la fonction racine carrée en 0
la droite d'équation $x = 0$ est tangente verticale à la courbe à l'origine du repère.



• Si C_f admet une pointe au point d'abscisse a alors la fonction n'est pas dérivable en a .

Exemple classique de la fonction valeur absolue en 0



Formules :

On dit qu'une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I si pour tout x appartenant à I , le nombre dérivé de f en x existe.

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f : x \mapsto k \ (k \in \mathbb{R})$	$f' : x \mapsto 0$	\mathbb{R}
$f : x \mapsto x$	$f' : x \mapsto 1$	\mathbb{R}
$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$
$f : x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \mapsto n x^{n-1}$	\mathbb{R}
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
$f : x \mapsto \frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^*

Opérations sur les fonctions dérivables :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur D et k un réel, alors :

• Les fonctions $k \cdot u$, $u + v$ et $u \cdot v$ sont dérivables sur D et :

$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \quad , \quad (u + v)' = u' + v' \quad \text{et} \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

• Si pour tout réel a de D , $v(a) \neq 0$, les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur D et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad , \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

Soit a et b deux réels et g une fonction dérivable sur un intervalle I .

Pour tout réel x , tel que $ax + b \in I$, la fonction f définie par $f(x) = g(ax + b)$ est dérivable, et on a :

$$f'(x) = ag'(ax + b)$$

Composée avec une fonction affine :