6 : APPLICATION DE LA DÉRIVATION - L'ESSENTIEL DU COURS

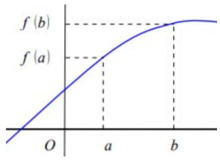
RAPPEL IMPORTANT

Sens de variation d'une fonction :

*On oublie souvent de préciser **strictement**, mais il ne faut pas oublier qu'une fonction strictement croissante est croissante . Ce n'est donc pas faux.*

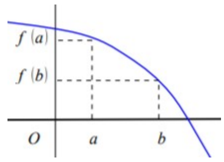
Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est :

- **croissante** sur I , lorsque pour tous réels a et b de I , tels que $a<b$, on a $f(a)\leqslant f(b)$.



- **strictement croissante** sur I , lorsque pour tous réels a et b de I , tels que $a<b$, on a $f(a)<f(b)$. **Le sens de l'inégalité est conservé**

- **décroissante** sur I , lorsque pour tous réels a et b de I , tels que $a<b$, on a $f(a)\geqslant f(b)$.



- **strictement décroissante** sur I , lorsque pour tous réels a et b de I , tels que $a<b$, on a $f(a)>f(b)$. **Le sens de l'inégalité change**

Du sens de variation au signe de la dérivée :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x)\geqslant 0$.
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x)\leqslant 0$.
- Si f est constante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x)=0$

Du signe de la dérivée au sens de variation :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout x de I, $f'(x)\geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x)\leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x)=0$, alors f est constante sur I.

Fonction STRICTEMENT croissante ou décroissante :

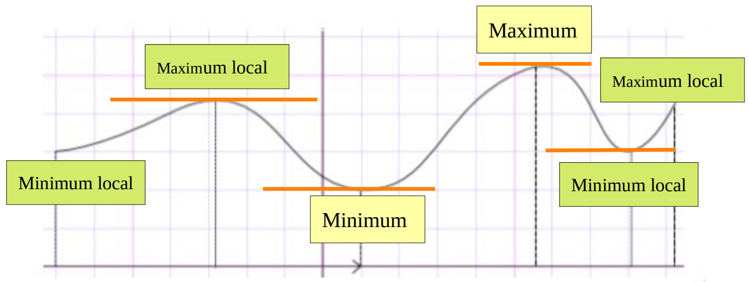
Si la dérivée f' est **strictement positive** sur I, **sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule**, alors f est **strictement croissante** sur I.

Si la dérivée f' est **strictement négative** sur I, **sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule**, alors f est **strictement décroissante** sur I.

Extremum :

- f admet **un minimum** sur I en x_m , si pour tout réel x de I , $f(x_m)\leqslant f(x)$

- f admet **un maximum** sur I en x_M, si pour tout réel x de I , $f(x_M)\geqslant f(x)$



Lien avec la dérivation :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I (attention donc aux extrémités) et c un réel de I.

Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c)=0$.

Et réciproquement :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I.
Si la dérivée f' **s'annule** en c en **changeant de signe**, alors $f(c)$ est un extremum local de f sur I.

Pour fixer les idées :

On choisit les extremums éventuels de f parmi les réels c vérifiant :

- c est une borne de I ,
- c est un réel où f n'est pas dérivable ,
- c est un réel où f est dérivable et tel que $f'(c)=0$