Notations :

(u_n) désigne **une suite.**

u_n désigne un nombre appelé **terme général de la suite, terme de rang n** ou **terme d'indice n.**

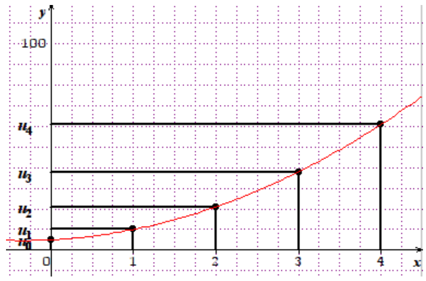
u_0 est le **terme initial** de la suite (u_n) . (Parfois, le terme initial peut être u_1 ou u_2 …)

Définition par une formule explicite :

Soit f une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$. (au moins)
On définit une suite (u_n) de façon **explicite** en posant, pour tout entier naturel n , $u_n = f(n)$.
(On peut calculer directement à partir de n le terme d'indice n)

Représentation graphique :

On dispose alors, à partir de la courbe représentative de la fonction f , d'une représentation graphique de la suite (u_n) .
Sur l'axe des ordonnées, on peut lire les termes u_0 , u_1 , u_2 , …



- Si f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est décroissante.
- Si f est majorée sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est majorée.
- Si f est minorée sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est minorée.

Les réciproques sont fausses

Définition par récurrence :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , telle que, pour tout réel $x \in I$, $f(x) \in I$.
On peut alors définir une suite (u_n) par la donnée de u_0 ($u_0 \in I$) , et de **la relation de récurrence** $u_{n+1} = f(u_n)$.

Inconvénient : pour déterminer par exemple u_7 , il faut connaître u_6 et donc u_5 …

Représentation graphique :

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$ et $u_0 = 1$.

On note f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 10$

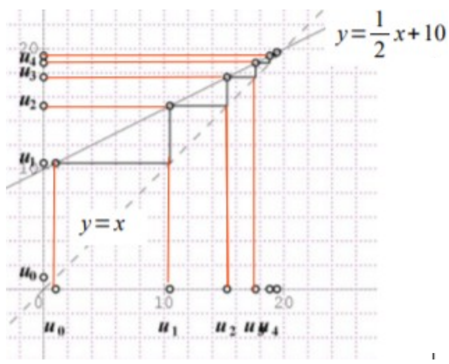
Étape 1 : On trace la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 10$

Étape 2 : On trace la droite d'équation $y = x$

Étape 3 : On place u_0 sur l'axe des abscisses

Étape 4 : On place $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées

Étape 5 : On reporte u_1 sur l'axe des abscisses grâce à la droite d'équation $y = x$



et ainsi de suite … pour obtenir u_2 , u_3 , u_4 ….

Dans la pratique, on ne dessine pas tous les traits de construction et on se contente de mettre en évidence les variations et les limites.

Variations :

Une suite (u_n) est **croissante** si, pour tout entier naturel n , $u_n \le u_{n+1}$.

Une suite (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier naturel n , $u_n \ge u_{n+1}$.

Une suite (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

On définit de même ces notions **strictement**.

On dit aussi que la suite est croissante ou décroissante à partir du rang p .

Comment fait-on dans la pratique ?

- On étudie le signe de la **différence** $u_{n+1} - u_n$
- Si la suite est à termes strictement **positifs** (ou strictement négatifs), on compare le **quotient** $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1
- Si $u_n = f(n)$, on peut étudier les variations de la fonction f .

Suite bornée :

On dit que M est **un majorant** et que m est **un minorant** de la suite.

- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \leqslant M$.
- Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \geqslant m$.
- Une suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Limites :

- Suite convergente : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$
- Suite divergente : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ou aucun des trois cas (ex : $u_n = (-1)^n$)