8 : SUITES ARITHMÉTIQUES ET SUITES GÉOMÉTRIQUES - L'ESSENTIEL DU COURS

Suites arithmétiques :

Définition par récurrence :

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique** , s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1}=u_n+r$.

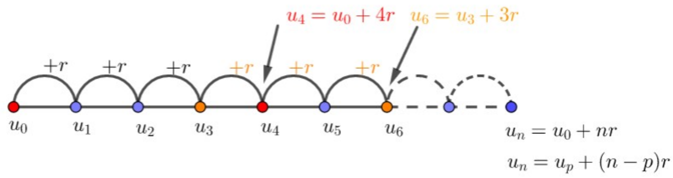
Le réel r est appelé **raison** de la suite (u_n). (r peut être positif ou négatif)

Dans la pratique on calcule $u_{n+1}-u_n$.

Définition par une formule explicite :

Pour tout entier naturel n , on a : $u_n=u_0+nr$

Pour tous entiers naturels p et n , on a : $u_n=u_p+(n-p)r$



Monotonie :

- Si $r>0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r<0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r=0$, alors la suite (u_n) est constante.

Limites :

- Si $r>0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$
- Si $r<0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

Sommes des termes consécutifs :

Le nombre de termes de la somme $u_p+u_{p+1}+\ldots+u_q$ (p , q entiers naturels tels que $p\leqslant q$) est $\boldsymbol{q-p+1}$

S = nombre de termes $\times$ $\dfrac{\textbf{\textit{premier terme}}+\textbf{\textit{dernier terme}}}{\mathbf{2}}$ exemple important : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques :

Définition par récurrence :

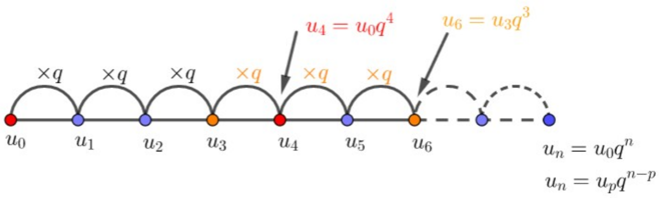
On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique** , s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1}=qu_n$.

Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n). (q peut-être positif ou négatif)

Définition par une formule explicite :

Pour tout entier naturel n , on a : $u_n=u_0\, q^n$

Pour tous entiers naturels p et n , on a : $u_n=u_p\times q^{n-p}$



Monotonie :

Il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1}-u_n=u_0\times q^{n+1}-u_0\,q^n=u_0\times(q^{n+1}-q^n)=q^n\times u_0\times(q-1)$

en comparant u_0 à 0 et q à 1.

Par exemple, si $q>1$ et $u_0<0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

Limites :

- Si $-1<q<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$
- Si $q=1$, alors pour tout n , $q^n=1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=1$
- Si $q>1$, alors la suite (q^n) est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$
- Si $q\leqslant-1$, alors la suite (q^n) est divergente

Sommes des termes consécutifs :

S = premier terme $\times\dfrac{\mathbf{1}-\boldsymbol{q}^{\textit{nombre de termes}}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{q}}$ exemple important : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} q^i=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$