GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Avant tout, rappelons une propriété fondamentale :

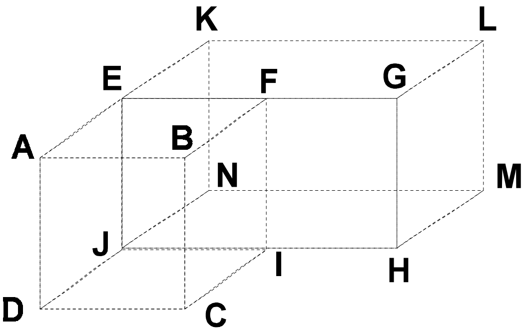
Tout théorème de Géométrie plane s'applique dans n'importe quel plan de l'espace.

1) VECTEURS DE L'ESPACE

Les définitions et propriétés des vecteurs du plan s'étendent à l'espace.

Comme dans le plan, à tout couple de points A et B de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

ABCDEFIJ est un cube
EGHJKLMN est un parallélépipède ractangle tel que HM = CI et JH = 2JI



Les exemples de ce chapitre se réfèrent au dessin ci-contre

- Lorsque A ≠ B, **la direction** de $\overrightarrow{AB}$ est celle de la droite (AB) , **le sens** de $\overrightarrow{AB}$ est le sens de A vers B et la **longueur** ou **norme** de $\overrightarrow{AB}$, notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, est la distance AB .

  Lorsque A = B , $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, noté $\vec{0}$.
- On désigne souvent les vecteurs par une seule lettre, par exemple $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ …
- Pour tout point O de l'espace et pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

VECTEURS EGAUX

Chacune des propriétés suivantes signifie que les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même direction, même sens et même norme.
- ABCD est un parallélogramme, c'est à dire [AC] et [BD] ont même milieu .
  (*Si* A, B, C *et* D *sont alignés, on dit que* ABCD *est un parallélogramme aplati)*

REGLES DE CALCUL

Les règles de calcul sur les vecteurs de l'espace sont analogues aux règles de calcul sur les vecteurs du plan.

- **RELATION DE CHASLES :**

  Ex : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} =$ $\quad$ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} =$ $\quad$ $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{KL} =$

- **REGLE DU PARALLELOGRAMME :**

  Ex : $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DJ} =$ $\quad$ $\overrightarrow{JN} + \overrightarrow{JH} =$ $\quad$ $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{DA} =$

- **OPPOSE D'UN VECTEUR :**

  Ex : $\overrightarrow{AB} =$ $\quad$ $\overrightarrow{JN} + \overrightarrow{LG} =$

- **MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN REEL :**
  Pour tous réels a et b, et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

  $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$, $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$,
  $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$, $a\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ etc …

VECTEURS COLINEAIRES

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui ont la même direction sont dits **colinéaires.**
  Par convention le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.
- Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

  Ex : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{AB}$
- Dire que les points A, B et C (distincts) sont alignés revient à dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

  Ex : Montrer que les points D, I et M sont alignés.

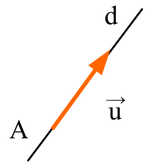
VECTEURS ORTHOGONAUX

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les directions sont orthogonales sont dits **orthogonaux.** On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.
  Par convention le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

Ex : $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{NM}$

2) INTERPRETATION VECTORIELLE DES DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

A) DROITES



Soit d une droite. On appelle **vecteurs directeurs** de d les vecteurs, non nuls, définis par deux points de d .

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
(A ; $\vec{u}$) représente la droite qui passe par A et de direction, la direction de $\vec{u}$.

Rem:

- La droite (A ; $\vec{u}$) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires,
  c'est à dire tels qu'il existe un réel k vérifiant $\overrightarrow{AM} = k\ \vec{u}$
- Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires,
  c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\ \overrightarrow{CD}$

B) PLANS

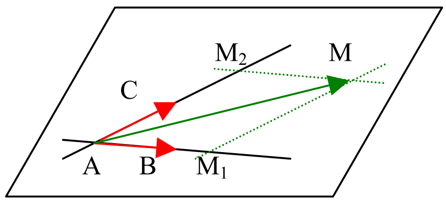
PLAN DETERMINE PAR TROIS POINTS

Soit A, B et C trois points non alignés.
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe des réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM} = x\ \overrightarrow{AB} + y\ \overrightarrow{AC}$

Preuve :
On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

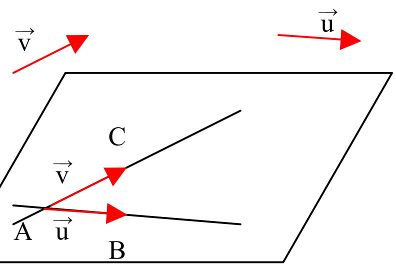
- Le repère (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) est un repère de (ABC) . Ainsi, pour tout point M du plan, il existe un unique couple de réels (x , y) tels que $\overrightarrow{AM} = x\ \vec{u} + y\ \vec{v}$

- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel qu'il existe deux réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM} = x\ \vec{u} + y\ \vec{v}$.
  On note M_1 et M_2 les points définis par $\overrightarrow{AM_1} = x\ \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_2} = y\ \overrightarrow{AC}$
  L'égalité $\overrightarrow{AM_1} = x\ \overrightarrow{AB}$ prouve que M_1 est sur (AB) , donc dans le plan (ABC). De même M_2 est sur (AC), donc dans le plan (ABC) .
  D'autre part on a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_2}$, donc AM_1MM_2 est un parallélogramme.
  Les sommets A, M_1 et M_2 sont dans le plan (ABC), il en est donc de même pour le quatrième sommet M .



On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **des vecteurs directeurs** du plan (ABC) .

PLAN DEFINI PAR UN POINT ET UN COUPLE DE VECTEURS NON COLINEAIRES



Un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires déterminent un unique plan : le plan (ABC) où $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
On note **(A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$)** ce plan
(A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe deux réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM} = x\ \vec{u} + y\ \vec{v}$.

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **des vecteurs directeurs** du plan (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$)
ou encore que le plan (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Rem :
Si $\vec{u}\,'$ est un vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$, et $\vec{v}\,'$ un vecteur non nul colinéaire à $\vec{v}$, alors le plan (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) est le même que le plan (A ; $\vec{u}\,'$, $\vec{v}\,'$) .

Ex : Le plan (A ; $\overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{KL}$) est le plan (A ; $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$) …

3) VECTEURS COPLANAIRES

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, … , de l'espace sont dits coplanaires lorsqu'un point O quelconque et les points A, B ,C, … , définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$, … , sont coplanaires.

Cette définition ne dépend pas du point O choisi.

Rem :

- Deux vecteurs sont toujours coplanaires.
- Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors quel que soit le vecteur $\vec{w}$, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

Ex : Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont coplanaires.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires revient à dire qu'il existe des réels a et b tels que $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$.

Preuve :

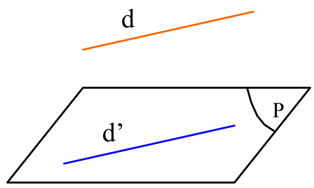
Soit O un point de l'espace. On considère les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les points O, A et B ne sont pas alignés et déterminent donc un plan, le plan (OAB).
Par définition, dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires revient à dire C ∈ (OAB) … ce qui revient à dire qu'il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{OC} = a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB}$.

4) INTERPRETATION VECTORIELLE DU PARALLELISME

A) DEUX DROITES

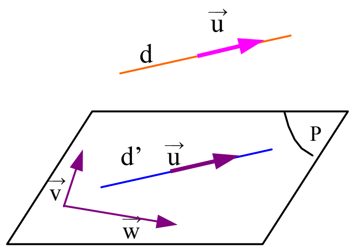
Une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

B) UNE DROITE ET UN PLAN



Rappel :

Dire qu'une droite d est parallèle à un plan P revient à dire que d est parallèle à une droite d' contenue dans P .

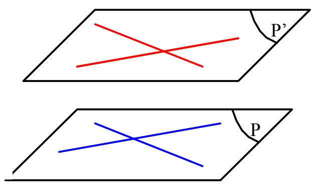


Nous pouvons maintenant énoncer une forme vectorielle de ce résultat :

Dire qu'une droite d , de vecteur directeur $\vec{u}$, est parallèle à un plan P , de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, revient à dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

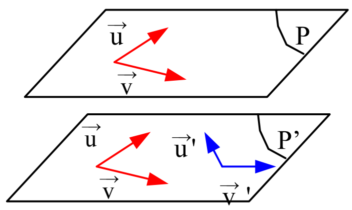
ou encore : … il existe des réels a et b tels que $\vec{u} = a\,\vec{v} + b\,\vec{w}$

C) DEUX PLANS



Rappel :

Dire qu'un plan P est parallèle à un plan P' revient à dire que l'un des plans contient deux droites sécantes parallèles à l'autre plan.



Nous pouvons maintenant énoncer une forme vectorielle de ce résultat :

Dire qu'un plan P , de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, est parallèle à un plan P' de vecteurs directeurs $\vec{u}\,'$ et $\vec{v}\,'$ revient à dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}\,'$ et $\vec{v}\,'$ sont coplanaires.

ou encore : … il existe des réels a et b tels que $\vec{u}\,' = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$ et, il existe des réels a' et b' tels que $\vec{v}\,' = a'\,\vec{u} + b'\,\vec{v}$

5) REPERES ET COORDONNEES

A) BASE ET REPERE

représentation classique d'un repère orthonormal
(O; $\vec{i}$; $\vec{j}$, $\vec{k}$)

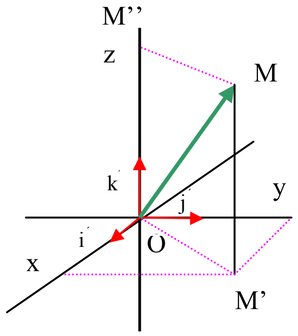
Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs **non coplanaires** de l'espace et O un point de l'espace, alors :

- ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est **une base** des vecteurs de l'espace
- (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est **un repère** de l'espace

On dit que le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) (la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)) est **orthogonal ,** lorsque les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux .
Si, de plus, les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires (ont pour norme 1) alors, on dit que le repère (la base) est **orthonormal** .

Ex :

B) COORDONNEES D'UN POINT, D'UN VECTEUR



Soit (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) un repère de l'espace .
A tout point M de l'espace, on peut associer un unique triplet de réels (x ; y ; z) tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}$$

On dit que (x ; y ; z) sont les **coordonnées** du point M dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) ou que (x ; y ; z) sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) .

x , y et z sont respectivement **l'abscisse** , **l'ordonnée** et **la cote** du point M .

Preuve :

La parallèle menée par M à la droite (O ; $\vec{k}$) coupe le plan (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) en M' . La parallèle menée par M à la droite (OM') coupe la droite (O ; $\vec{k}$) en M'' (en effet les droites (O ; $\vec{k}$) et (OM') sont dans un même plan, et dans ce plan (O ; $\vec{k}$) et (OM') sont sécantes) .
Le quadrilatère OM'MM'' est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}$.
On note (x ; y) les coordonnées de M' dans le plan de repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ; on a donc $\overrightarrow{OM'} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j}$.
D'autre part, $\overrightarrow{OM''}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires ; il existe donc un réel z tel que $\overrightarrow{OM''} = z\ \vec{k}$.
On en déduit que :

$$\overrightarrow{OM} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}$$

Cette écriture est unique (admis)

Ex :

Dans le repère (J ; $\overrightarrow{JD}$; $\overrightarrow{JI}$; $\overrightarrow{JE}$) :

Soit (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) un repère de l'espace.
Dire que un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (x ; y ; z) dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) signifie que le point M défini par $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ a pour coordonnées (x ; y ; z) dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) .

Par abus de langage, on dit parfois que $\vec{u}$ a pour coordonnées (x ; y ; z) dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

C) PROPRIETES

Les propriétés et les règles de calcul vues dans le plan pour les coordonnées de vecteurs et de points se prolongent dans l'espace en ajoutant simplement une troisième coordonnée.

Dans un repère donné de l'espace, soit $\vec{u}$ (a , b , c) et $\vec{v}$ (a' , b' , c') deux vecteurs , A (x , y , z) et B (x' , y' , z') deux points.

- Pour tout réel k , le vecteur k $\vec{u}$ a pour coordonnées
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées
- $\vec{u} = \vec{v}$ $\Leftrightarrow$
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées
- Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si,et seulement si il existe un réel k (non nul) tel que

6) DISTANCE ET ORTHOGONALITE

Dans ce paragraphe l'espace est muni d'une repère **orthonormal** (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) .

A) NORME ET DISTANCE

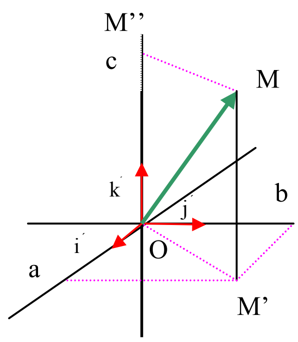
Dans un repère orthonormal,

- si un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (a ; b ; c) alors : $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- si les points A et B ont pour coordonnées respectives (x_A , y_A , z_A) et (x_B , y_B , z_B) , alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Comme dans le plan

Preuve :



- On note M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont (a ; b ; c) et $\|\vec{u}\|^2 = OM$
Puisque le repère est orthonormal, le triangle OM'M est rectangle en M' .
Donc $OM'^2 = a^2 + b^2$ et $M'M^2 = OM''^2 = c^2$
On en déduit, d'après le théorème de Pythagore que :

$\|\vec{u}\|^2 = OM^2 = OM'^2 + OM''^2 = a^2 + b^2 + c^2$

- AB = $\|\overrightarrow{AB}\|$ …

B) CONDITION ANALYTIQUE D'ORTHOGONALITE

Dans **une base orthonormale** : Dire que les vecteurs $\vec{u}$ (x ; y ; z) et $\vec{v}$ (x' ; y' ; z') sont orthogonaux revient à dire que $x x' + y y' + z z' = 0$

Comme dans le plan

Preuve :

- Le résultat est immédiat lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls , on note M et M' les points définis par $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OM}'$.
  Les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ sont respectivement celles de M et de M' .
  Ainsi dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux revient à dire que le triangle OMM' est rectangle en O , c'est à dire , d'après le théorème de Pythagore $OM^2 + OM'^2 = MM'^2$

  Or $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $OM'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ et $MM'^2 = (x' - x)^2 + (y - y'^2) + (z - z')^2$

  Ainsi $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = (x' - x)^2 + (y - y'^2) + (z - z')^2$
  $\Leftrightarrow x x' + y y' + z z' = 0$ *(après développement et simplification)*