EQUATIONS DE PLANS, DE DROITES , DE COURBES DE NIVEAUX

Dans tout le chapitre, l'espace est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

1) EQUATIONS CARTESIENNES DE PLANS : CAS PARTICULIERS

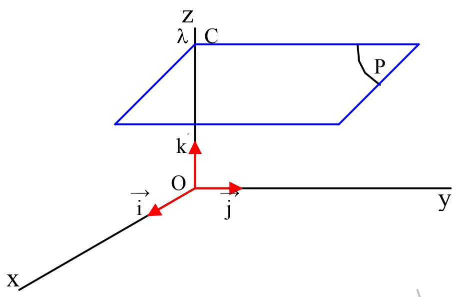
A) PLANS DE COORDONNEES

(xOy) est l'ensemble des points M (x , y , z) de l'espace dont la côte z = 0 ...

On appelle plans de coordonnées, les plans : • (xOy), plan passant par O et de vecteurs directeurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ • (yOz), plan passant par O et de vecteurs directeurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$ • (xOz), plan passant par O et de vecteurs directeurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$	• Le plan (xOy) a pour équation z = 0 • Le plan (yOz) a pour équation x = 0 • Le plan (xOz) a pour équation y = 0

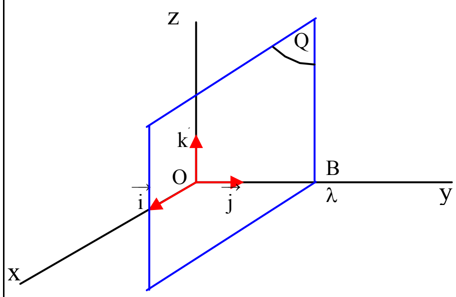
B) PLAN PARALLELE A UN PLAN DE COORDONNEES

Plan parallèle au plan (xOy)



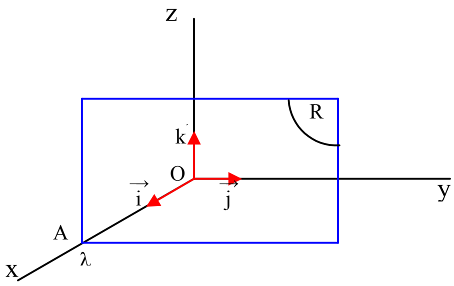
Le plan P a pour équation z = λ

Plan parallèle au plan (xOz)



Le plan Q a pour équation y = λ

Plan parallèle au plan (yOz)

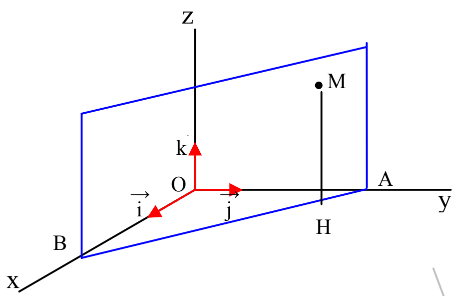


Le plan R a pour équation x = λ

P est l'ensemble des points M (x , y , z) de l'espace dont la côte z = λ ...

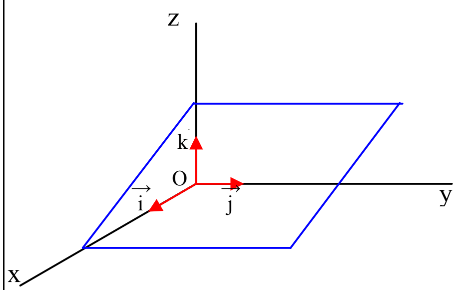
C) PLAN PARALLELE A UN AXE DE COORDONNEES

Plan parallèle à l'axe (Oz) sécant aux deux autres axes.



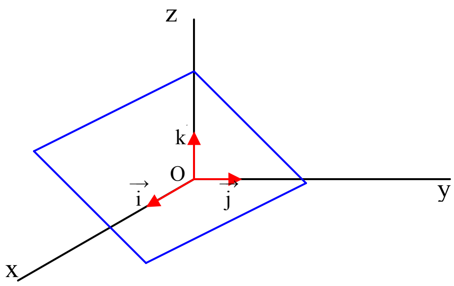
Le plan a une équation de la forme
a x + b y = d (où a et b ne sont pas tous les deux nuls)

Plan parallèle à l'axe (Oy) sécant aux deux autres axes.



Le plan a une équation de la forme
a x + c z = d (où a et c ne sont pas tous les deux nuls)

Plan parallèle à l'axe (Ox) sécant aux deux autres axes.



Le plan a une équation de la forme
b y + c z = d (où b et c ne sont pas tous les deux nuls)

Le plan est l'ensemble des points M (x , y , z) de l'espace tels que le projeté orthogonal H de M sur (x Oy) soit sur la droite (AB) . Or, dans (x Oy) , (AB) a une équation de la forme a x + b y = d ....

2) EQUATIONS CARTESIENNES DE PLANS : CAS GENERAL

- Tout plan admet une équation du type a x + b y + cz + d = 0 où l'un au moins des réels a, b et c est non nul et d est un réel quelconque.
- Réciproquement :
  Soit a, b ,c et d des réels tels que l'un au moins des réels a, b et c n'est pas nul.
  L'ensemble des points M (x ; y ; z) de l'espace tels que a x + b y + cz + d = 0 est un plan.

Rem :

- Si a , b et c sont nuls simultanément, deux cas se présentent :
  - d = 0 , et alors la relation a x + b y + cz + d = 0 est toujours vérifiée
  - d ≠ 0 , et alors la relation a x + b y + cz + d = 0 n'est jamais vérifiée

- Un plan admet une infinité d'équations.
  Si $a x + b y + cz + d = 0$ est l'équation d'un plan, alors $k (a x + b y + cz + d) = 0$, où $k \in \mathbb{R}^*$, est aussi une équation de ce plan.
  Les équations $\frac{2}{3} x - \frac{1}{3} y + \frac{5}{3} z - 4 = 0$ et $2 x - y + 5 z - 12 = 0$ sont deux équations du même plan.
- Si $d \neq 0$, le plan ne passe pas par l'origine du repère.
  On peut alors toujours choisir une équation de la forme $a' x + b' y + c' z + 1 = 0$

3) VECTEUR ORTHOGONAL A UN PLAN

On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ non nul est **orthogonal (ou normal)** à un plan si sa direction est une droite orthogonale au plan.

Lorsque le repère $(O ; \vec{i} , \vec{j} ; \vec{k})$ est orthonormé, le plan P d'équation $a x + b y + cz + d = 0$ admet le vecteur $\vec{u} (a ; b ; c)$ comme vecteur normal.

Ex :
Dans un repère orthonormal, le plan P admet comme équation : $3 x - 5 y + 2 z - 4 = 0$
Le vecteur $\vec{u} (3 ; - 5 ; 2)$ est orthogonal à P.

4) PLANS PARALLELES

Soit deux plans P et Q d'équations respectives :
$$a x + b y + cz + d = 0 \quad \text{et} \quad a' x + b' y + c'z + d' = 0$$
Les plans P et Q sont parallèles si, et seulement si a, b, c et a', b', c' sont proportionnels.

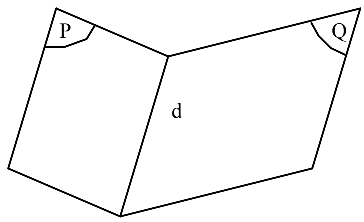
Preuve: (dans un repère orthonormé)
$\vec{n} (a , b , c)$ est un vecteur normal à P et $\vec{n'} (a' , b', c')$ est un vecteur normal à Q.
P et Q sont parallèles si, et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires ce qui revient à dire qu'il existe un réel k tel que $a' = k a$, $b' = k b$ et $c' = k c$.

Ex :
Soit P : $2 x - 5 y + 3 z - 5 = 0$ et Q : $12 x - 30 y + 18 z + 12 = 0$

$\frac{12}{2} = \frac{-30}{-5} = \frac{18}{3} = 6$; on en déduit que P et Q sont parallèles.

5) SYSTEME D'EQUATIONS CARTESIENNES D'UNE DROITE

Soit $M (x ; y ; z)$ un point de l'espace.
M appartient à une droite d de l'espace si, et seulement si ses coordonnées vérifient un système d'équations cartésiennes de la forme :
$$\begin{cases} a x + b y + cz + d = 0 \\ a' x + b' y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$ où a, b, c et a', b', c' ne sont pas proportionnels
Ce système caractérise donc les points de la droite d.



Preuve:
- Si d est une droite de l'espace, on peut trouver deux plans P et Q d'équations respectives $a x + b y + cz + d = 0$ et $a' x + b' y + c'z + d' = 0$ tels que P et Q soient sécants suivant la droite d.
Ainsi, un point $M (x ; y ; z)$ appartient à d si, et seulement si ses coordonnées vérifient le système formé par les équations de P et Q.

- Réciproquement, si a, b, c et a', b', c' ne sont pas proportionnels (et non tous nuls), alors $a x + b y + cz + d = 0$ et $a' x + b' y + c'z + d' = 0$ sont des équations cartésiennes de deux plans P et Q non parallèles et donc sécants suivant une droite d.

6) FONCTIONS A DEUX VARIABLES

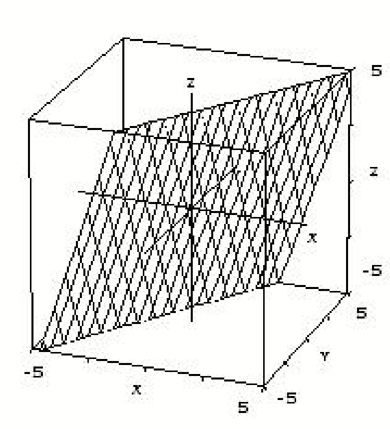
Les fonctions qui ont été étudiées jusqu'ici sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ (ou sur une partie de $\mathbb{R}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elles ne dépendent que d'une seule variable et permettent d'étudier un grand nombre de problèmes.
Cependant certaines situations mettent en jeu plusieurs variables : l'aire d'un rectangle, le volume d'un cône ...
On est donc amené à définir des fonctions à plusieurs variables.

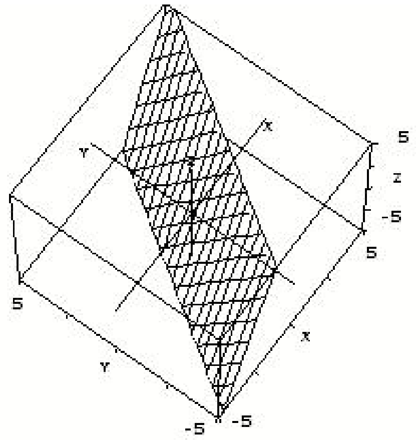
Soit x un réel d'un intervalle I et y un réel d'un intervalle J.
Définir **une fonction f des deux variables x et y**, c'est associer à chaque couple $(x ; y)$, avec $x \in I$ et $y \in J$, un réel et un seul noté $f (x ; y)$

Soit f une fonction de deux variables x et y , où x appartient à un intervalle I et y à un intervalle J.
La représentation graphique de f est l'ensemble S des points $M (x ; y ; z)$ de l'espace tels que $z = f (x ; y)$, où $x \in I$ et $y \in J$
On dit que $z = f (x ; y)$ est une équation de **la surface** S dans le repère $(O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$

Exemples :

- Représentation graphique de la fonction f qui à tout couple de réels (x ; y) associe le réel f (x ; y) = 3 x – 2 y – 1

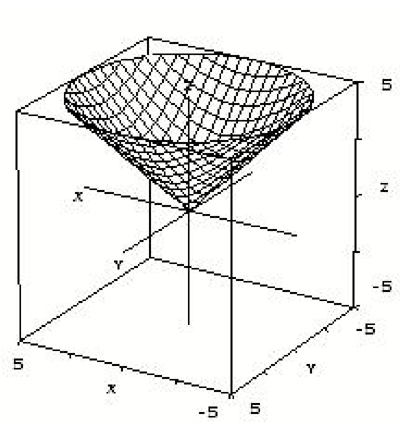


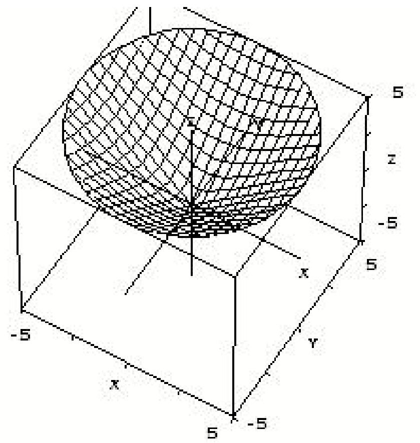


La représentation graphique de f est la surface S d'équation z = 3 x – 2 y – 1

La représentation graphique de cette fonction est donc le plan d'équation 3x – 2y – z – 1 = 0

- Représentation graphique de la fonction g qui à tout couple de réels (x ; y) associe le réel g (x ; y) = $\sqrt{x^2 + y^2}$



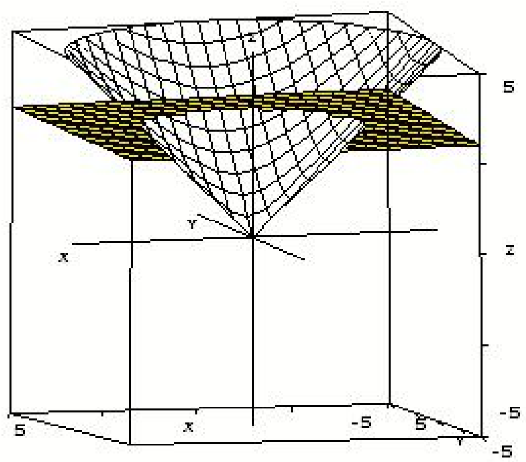


La représentation graphique de f est la surface S d'équation z = $\sqrt{x^2 + y^2}$

7) COURBES DE NIVEAU

> Dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) , la courbe d'intersection d'une surface S avec le plan horizontal d'équation z = k est appelée courbe de niveau k.

Ex : courbe de niveau 3 de la surface S d'équation z = $\sqrt{x^2 + y^2}$



Le "quadrillage" déssiné par le logiciel représente des courbes de niveau.