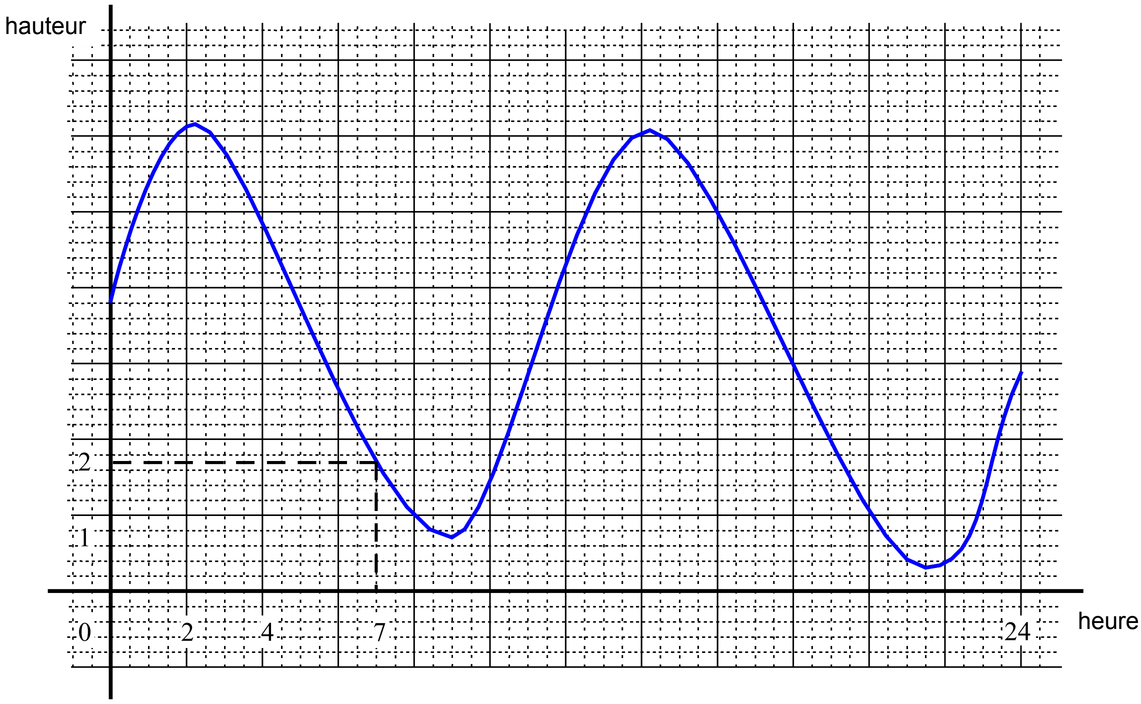
Fonctions : courbes

Exemple

On a relevé, dans le port de Dunkerque les hauteurs d'eau le 11 septembre 1999.
Les résultats sont donnés sur le graphique suivant :



Remarque

A chaque instant x de la journée correspond une hauteur d'eau et une seule.
On dit que la hauteur de l'eau est fonction de l'heure.
On peut lire sur le graphique que la hauteur de l'eau à 7 heures est de 1,7 m environ.

Définition

Soit D une partie de l'ensemble $\mathbb{R}$.
On définit une fonction f de D dans $\mathbb{R}$, en associant à chaque réel x de D, un réel et un seul noté f(x) et que l'on appelle l'image de x par f.
La fonction est notée $f : D \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto f(x)$
L'ensemble D est appelé ensemble de définition de la fonction f.

Remarque

Dans l'exemple précédent f(x) désigne la hauteur de l'eau à l'heure x on notera $f : [0 ; 24] \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto f(x)$
D'après le dessin la hauteur de l'eau à 7 heures est de 1,7 m environ , on écrira $f(7) \approx 1,7$
(On n'oubliera pas que la valeur 1,7 déterminée à partir du dessin n'est sans doute pas exacte)

Définition

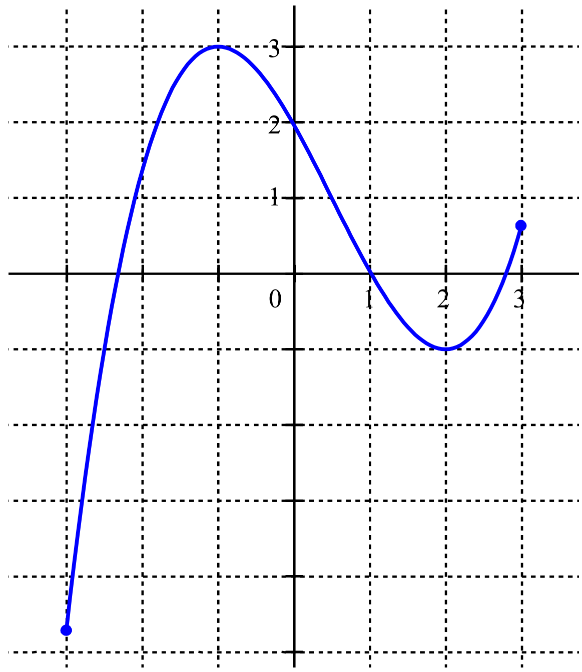
On appelle représentation graphique d'une fonction numérique f l'ensemble des points de coordonnées (x ; y) pour lesquels y est l'image de x par f, c'est-à-dire l'ensemble des points pour lesquels on a $y = f(x)$.
Cet ensemble de points s'appelle aussi courbe représentative de f ou courbe d'équation $y = f(x)$.

Remarque

Une représentation graphique est un dessin, sa précision n'est donc pas parfaite.
L'utilisation d'une représentation graphique permettra de donner des valeurs dont on sait qu'elles ne sont sans doute pas exactes.

Exercice 1

Le graphique ci-contre représente une fonction f définie sur [-3 ; 3]
En utilisant ce graphique :



1°) Déterminer l'image de -1,5.

2°) Déterminer les réels x ayant pour image 1.

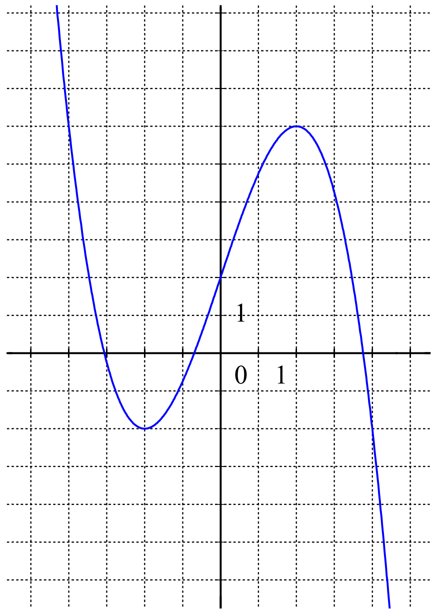
3°) Quel est le maximum de la fonction f sur [-3 ; 3] .
En quel valeur ce maximum est-il atteint ?

4°) Quel est le minimum de la fonction f sur [-3 ; 3] .
En quel valeur ce minimum est-il atteint ?

5°) Indiquer le sens de variation de la fonction f et donner le tableau des variations de f sur [-3 ; 3] .

Exercice 2

Le graphique ci-contre représente une fonction f définie sur ℝ.
En utilisant ce graphique :



1°) Résoudre l'équation f(x) = 0.

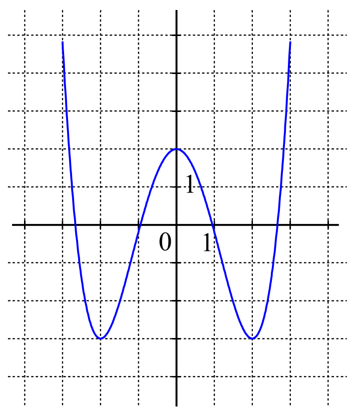
2°) Résoudre l'équation f(x) = 3.

3°) Résoudre l'équation f(x) = -4.

4°)Résoudre l'équation f(x) = -x + 1.

Exercice 3

Le graphique ci-contre représente une fonction f définie sur [-3 ; 3]
En utilisant ce graphique :



1°) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.

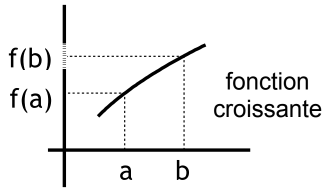
2°) Résoudre l'inéquation $f(x) > 1$.

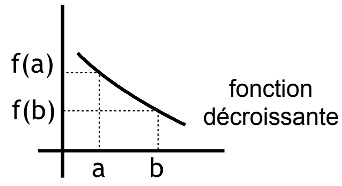
3°) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq \frac{1}{2}x - 3$.

Rappel

- Si une fonction f est croissante sur un intervalle I, alors :
  pour tout a ∈ I et tout b ∈ I tels que a ≤ b , on a f(a) ≤ f(b).
  (Une fonction croissante conserve l'ordre)

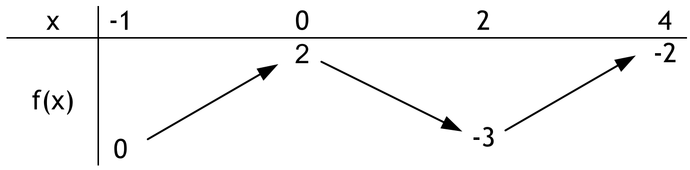
- Si une fonction f est décroissante sur un intervalle I, alors
  pour tout a ∈ I et tout b ∈ I tels que a ≤ b , on a f(a) ≥ f(b).
  (Une fonction décroissante inverse l'ordre)





Exercice 4

On donne ci-contre le tableau de variations de la fonction f :



En utilisant les renseignements donnés par ce tableau :
1°) Donner la valeur de f(0).
2°) Les points A(0 ; -1) et B(2 ; -3) sont-ils sur la courbe représe
3°) Décrire le sens de variation de f.
4°) Tracer une courbe pouvant représenter la fonction f.
5°) Comparer f(1,5) et f(1,8).
6°) Comparer f(-0,5) et f(-0,8).

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur [1974 ; 1998] dont on donne ci-dessous un tableau de valeurs :

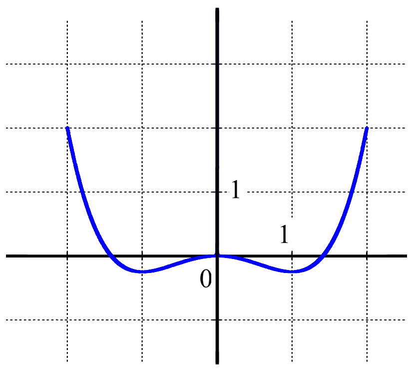
x	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
f(x)	6,3	6,5	6,5	6,5	6,5	6,4	6,4	6,6	6,8	6,8	6,8	6,8	6,6

x	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
f(x)	6,5	6,4	6,4	6,5	6,8	7,1	7,4	7,3	7,3	7,3	7,3	7,2

1°) Donner une représentation graphique de f.
2°) Que peut-on dire du sens de variation de f sur [1985 ; 1988], sur [1989 ; 1993], sur [1994 ; 1997].
3°) Quel est le maximum de f sur [1974 ; 1998] , en quelle valeur ce maximum est-il atteint ?
4°) Quel est le minimum de f sur [1974 ; 1998] , en quelle valeur ce minimum est-il atteint ?
5°) Les données du tableau ci-dessus représentent la dépense intérieure d'éducation rapportée au PIB, en pourcentage. (source : Ministère de l'Education). La courbe correspondante, publiée dans une revue était titrée : "Les dépenses d'éducation stagnent depuis 1993". Que pensez vous de ce titre ?

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur [-2 ; 2] et dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

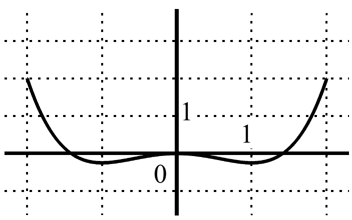


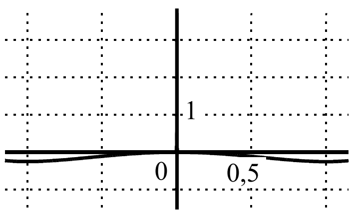
1°) Décrire le sens de variation de f.

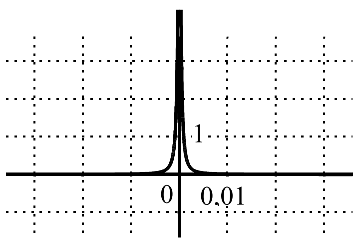
2°) Donner le minimum et le maximum de f sur [-2 ; 2].

3°) Résoudre graphiquement l'équation f(x) = 1.

On a effectué des agrandissements de la représentation graphique de f au voisinage du point de coordonnées (0 ; 0).





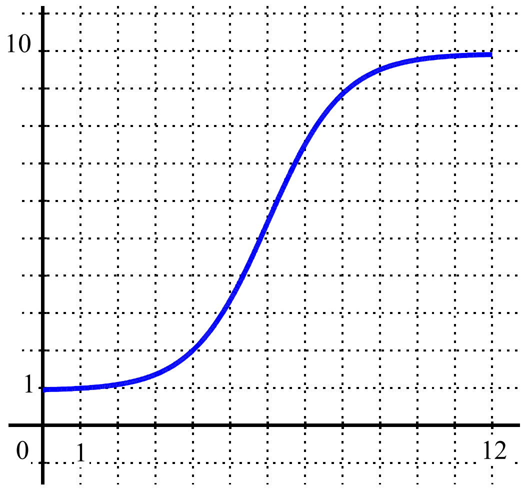


4°) Après avoir observé ces agrandissements, que pouvez-vous dire des réponses données aux questions 1°), 2°) et 3°) ?

5°) La fonction f est définie par : $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{(1000x)^2 + 0{,}1}$.
Avec une calculatrice donner des valeurs approchées de f(0,1) ; f(0,01) ; f(0,001) ; f(0,0001) ; f(0).

Exercice 7

La courbe ci-contre représente la fonction f : fréquentation en milliers de personnes par mois d'un site Web pour la période de janvier à décembre.
En utilisant cette courbe répondre aux questions suivantes :



1°) Quel est le sens de variation de la fonction f ?

2°) Quelle différence peut-on faire entre la variation de f sur [0 ; 5] et la variation de f sur [7 ; 12] ?

3°) Tracer sur le dessin la droite T4 d'équation y = x - 2.
Cette droite T4 qui "touche" la courbe au point A(4 ; 2) est appelée tangente à la courbe au point A d'abscisse 4.
Donner le coefficient directeur (la pente) de T4.

4°) Tracer la tangente T9 à la courbe au point B(9 ; 9,5), c'est-à-dire la droite T9 qui "touche" la courbe au point B d'abscisse 9.
Évaluer, à partir du dessin, le coefficient directeur de T9.

5°) On considère la tangente Tx à la courbe en son point M d'abscisse x.
Comment varie le coefficient directeur de la tangente Tx lorsque x varie de 0 à 5, lorsque x varie de 7 à 12 ?

6°) Pouvez-vous imaginer des conditions pratiques justifiant l'évolution du nombre de fréquentations de ce site web ?

Exercice 8

Le tableau ci-dessous donne, en milliards de francs, la dette publique de l'Etat.
(source : Ministères des Finances).

On note D(n) la dette publique de l'Etat, en milliards de francs, pour l'année n.

Année n	1990	1995	1996	1997	1998	1999
Dette D(n)	1704	3254	3542	3785	4021	4290

1°) Quelles sont les valeurs de D(1990) et D(1995) ?

2°) On appelle (C) la courbe représentative de la fonction D.
Placer sur un dessin les points de la courbe correspondant au tableau des données.
Tracer la courbe en supposant que l'on peut relier les points par des segments de droite.

(On dit dans ce cas que la courbe est obtenue par interpolation linéaire)

3°) Déterminer à partir de la courbe le montant de la dette publique de l'Etat en 1993.

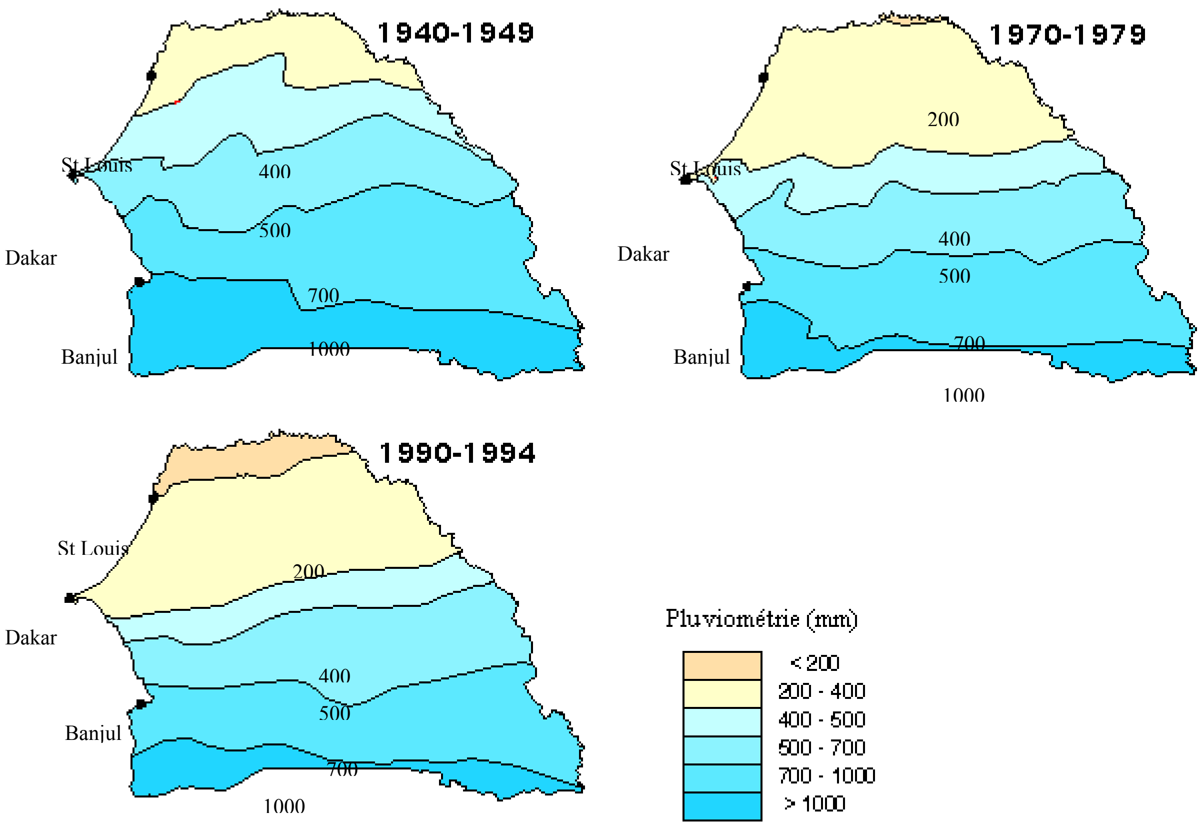
4°) Retrouver ce résultat par le calcul.

Remarque

Lorsqu'on détermine une valeur en assimilant une courbe à un segment de droite, on dit que l'on effectue une interpolation linéaire.

Exercice 9

Vous trouverez ci-dessous des cartes du Sénégal indiquant sous forme de courbes de niveau la pluviométrie annuelle en mm pour la période indiquée.



1°) Comment pouvez-vous interpréter les différentes lignes de niveau et leur évolution dans le temps ?

2°) Quel est le niveau de pluviométrie à St Louis entre 1970 et 1979 ?

3°) Quel est le niveau de pluviométrie à Dakar pour les trois périodes considérées ?