GENERALITES SUR LES FONCTIONS

1) QUELQUES RAPPELS ESSENTIELS SUR LA NOTION DE FONCTION

A) DEFINITION

Pour schématiser , ***une fonction*** *est un procédé qui associe à chaque réel d'un intervalle donné* ***un unique*** *réel .*

Mathématiquement parlant , on caractérise une fonction de la façon suivante :

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Cette écriture signifie que la fonction f , définie sur l'intervalle I , associe à tout réel x de l'intervalle I , **le** *(il est unique)* réel noté f (x) , appelé **image de x par f** .

x ne représente pas un réel donné , mais n'importe lequel des éléments de l'intervalle I . On dit que x est une variable .(On peut aussi utiliser les lettres u , t , etc)

On a appelé la fonction f , mais rien ne nous oblige à l'appeler ainsi . (On utilise souvent les lettres g , h , etc ou f1 , f2 ...)

Rem:

- Dans la pratique, les fonctions sont souvent données sans que soit précisé l'ensemble de définition.

Dans ce cas n'oubliez pas de chercher Df , en vous rappelant qu'il s'agit de tous les réels x tels que f (x) soit calculable.

- Les fonctions peuvent aussi être définies sur des réunions d'intervalles.

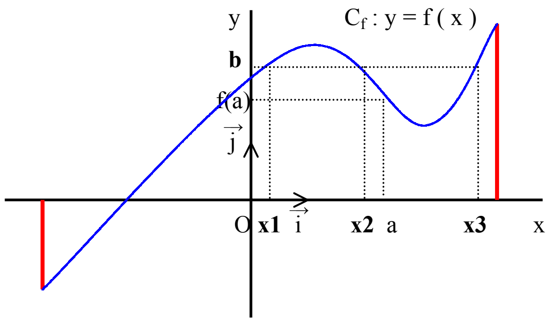
Par exemple la fonction inverse $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

B) REPRESENTATION GRAPHIQUE

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Si possible, on prend le repère orthonormal

Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ (I est un intervalle ou une réunion d'intervalles) .
L'ensemble des points M de coordonnées (x , f (x)) où x décrit I est **la courbe représentative** (ou **représentation graphique**) de la fonction f dans le plan .



On note, le plus souvent, C_f la courbe représentative de f.

On dit que la courbe C_f a pour équation cartésienne y = f (x) relativement au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Rem :

- On a déjà insisté sur le fait que pour tout réel x de I , f (x) est unique.

On en déduit une interprétation géométrique : *toute droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe représentative d'une fonction en* ***au plus*** *un point . Ceci est un moyen simple pour savoir si une courbe représente ou non une fonction ...*

- f (a) est l'unique **image** de a .
- x1 , x2 et x3 sont **les antécédents** de b . (Un réel peut admettre aucun antécédent, ou un, ou plusieurs antécédents.)

2) PARITE

ne pas oublier de le vérifier

Soit f une fonction définie sur un ensemble **I centré en zéro**.

- On dit que f est **paire** si , pour tout réel x de I , **f (-x) = f (x)** .
- On dit que f est **impaire** si , pour tout réel x de I , **f (-x) = - f (x)** .

I centré en zéro signifie que pour tout élément x de I , – x est aussi dans I .

Rem : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ sont bien sûr centrés sur 0 . Si une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$, il suffit seulement de montrer une des deux relations.

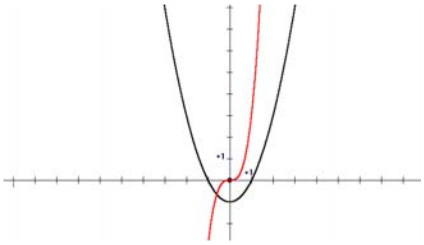
Ex :
Les fonctions $x \longmapsto |x|$, $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto x^2$, définies sur $\mathbb{R}$, sont des fonctions paires .
Les fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto x^3$,définies sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, sont des fonctions impaires .

Interprétation graphique :

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie .
Ex : $f : x \longmapsto x^2 - 1$

La courbe représentative d'une fonction impaire admet le point O pour centre de symétrie .
Ex : $f : x \longmapsto 3x^3$



Rem : Si une fonction f est paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur $Df \cap \mathbb{R}_+$.

3) VARIATIONS

A) FONCTION CROISSANTE …

On ne parle de croissance ou de décroissance que sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que :

- f est **croissante** (resp. **strictement croissante**) sur I , lorsque pour tous réels x et x' de I , tels que $\mathbf{x < x'}$, on a $\mathbf{f(x) \leq f(x')}$ (resp. $\mathbf{f(x) < f(x')}$) .
- f est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) sur I , lorsque pour tous réels x et x' de I , tels que $\mathbf{x < x'}$, on a $\mathbf{f(x) \geq f(x')}$ (resp. $\mathbf{f(x) > f(x')}$) .
- f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur I , lorsque f est soit croissante (resp. strictement) sur I , soit décroissante (resp. strictement) sur I .

Etudier les variations d'une fonction, c'est préciser les intervalles sur lesquels la fonction est monotone.

On résume ces résultats dans un tableau appelé (comme vous le savez) **tableau de variations** .

B) EXTREMUM

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , x_m et x_M deux réels de I . On dit que :

- f admet **un minimum** sur I en x_m , si pour tout réel x de I , $f(x_m) \leq f(x)$.
- f admet **un maximum** sur I en x_M , si pour tout réel x de I , $f(x_M) \geq f(x)$.

Ex : Pour tout réel x , $x^2 + 1 \geq 1$. De plus $0^2 + 1 = 1$

Ainsi, la fonction $x \longmapsto x^2 + 1$ admet 1 comme minimum en 0

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que :

- f est **majorée** sur I , s'il existe un réel M tel que pour tout x de I , $\mathbf{f(x) \leq M}$. On dit que M est **un majorant** de f .
- f est **minorée** sur I , s' il existe un réel m tel que pour tout x de I , $\mathbf{f(x) \geq m}$. On dit que m est **un minorant** de f .
- f est **bornée** sur I , si elle est minorée et majorée sur I .

Tout réel M' supérieur à M est aussi un majorant de f .

Tout réel m' inférieur à m est aussi un minorant de f .

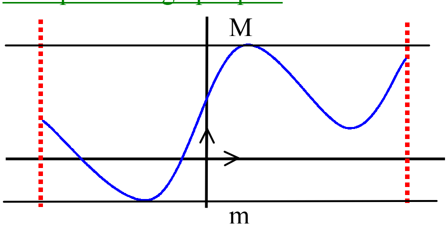
Une fonction est majorée par son maximum et est minorée par son minimum .

Attention :

Une fonction peut admettre un majorant (ou un minorant) sur un intervalle sans admettre forcément de maximum(ou de minimum) .

Ex : La fonction inverse est minorée par 0 sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, mais 0 n'est pas un minimum …

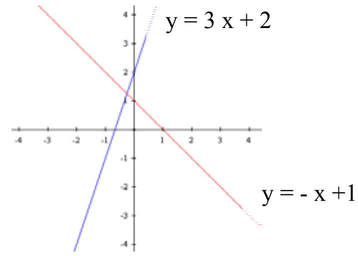
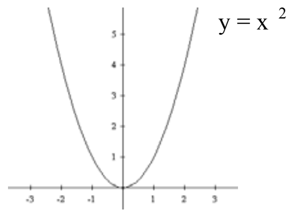
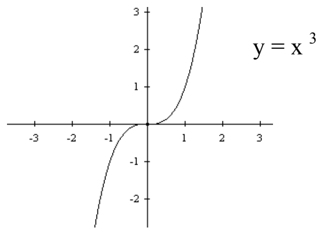
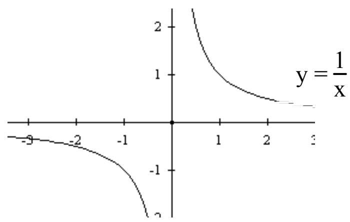
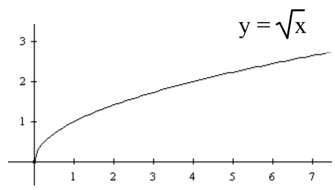
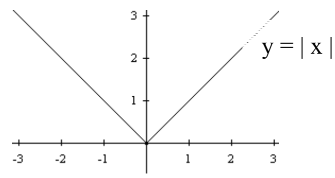
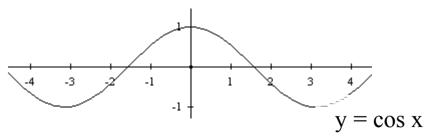
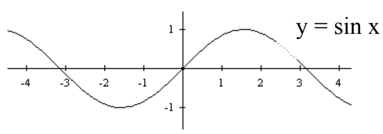
Interprétation graphique :



Dire que, sur un intervalle I, f est minorée par m et f est majorée par M (c'est à dire f est bornée) revient à dire graphiquement que la courbe représentative de f restreinte à I est située entre les deux droites parallèles d'équation y = m et y = M

Remarque importante : La notion de dérivée que nous verrons plus tard est un outil très performant pour l'étude des variations ; nous ne nous attarderons donc pas sur les méthodes que vous avez vues en classe de seconde.

4) PANORAMA DES FONCTIONS DE REFERENCE

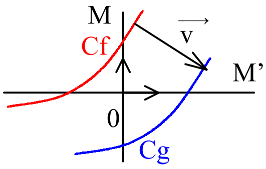
Fonctions	Ensemble de définition, variations …	Représentations graphiques
$f : x \longmapsto ax + b$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ Si $a > 0$ f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ▪ Si $a < 0$ f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$	
$f : x \longmapsto x^2$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ f est paire ▪ f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ ▪ La courbe représentative de f est **une parabole** de sommet O.	
$f : x \longmapsto x^3$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ f est impaire ▪ f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	
$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	▪ $D_f = \mathbb{R}^*$ ▪ f est impaire ▪ f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$ ▪ La courbe représentative de f est **une hyperbole** de centre O.	
$f : x \longmapsto \sqrt{x}$	▪ $D_f = [0 ; +\infty[$ ▪ f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$	
$f : x \longmapsto \lvert x \rvert$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ f est paire ▪ f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$	
$f : x \longmapsto \cos x$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ f est paire ▪ f est périodique de période 2π $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ ▪ La courbe représentative de f est une **sinusoïde**	
$f : x \longmapsto \sin x$	▪ $D_f = \mathbb{R}$ ▪ f est impaire ▪ f est périodique de période 2π $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ▪ La courbe représentative de f est une **sinusoïde**	

5) FONCTIONS ASSOCIEES

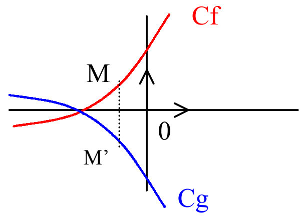
Soit f et g deux fonctions définies sur Df et Dg . On note Cf et Cg leurs courbes représentatives dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Si pour tout réel x de Dg , on a :

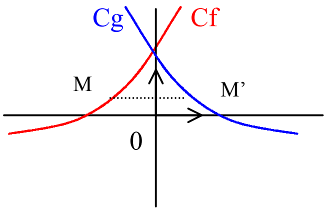
$\mathbf{g(x) = f(x - a) + b}$ (où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) , alors :
la courbe Cg est l'image de la courbe Cf par **la translation** de vecteur $\vec{v} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$



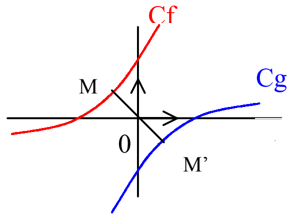
$\mathbf{g(x) = -f(x)}$, alors :
la courbe Cg est l'image de la courbe Cf par **la réflexion** d'axe (Ox)



$\mathbf{g(x) = f(-x)}$, alors :
la courbe Cg est l'image de la courbe Cf par **la réflexion** d'axe (Oy)



$\mathbf{g(x) = -f(-x)}$, alors :
la courbe Cg est l'image de la courbe Cf par **la symétrie** de centre O .



…d'où l'utilité de connaître les courbes représentatives de quelques fonctions de références .

En exercice, on étudiera également les fonctions $x \longmapsto |f(x)|$, $x \longmapsto f(|x|)$ et $x \longmapsto a\,f(x)$

6) COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS

A) EGALITE

Soit f et g deux fonctions.

On dit que les fonctions **f et g sont égales**, ce que l'on note **f = g** , si :

- Df = Dg
- pour tout $x \in Df$, $f(x) = g(x)$

Ex :

Les fonctions $f : x \longmapsto \sqrt{x^2}$ et $g : x \longmapsto |x|$ sont égales.

En effet $Df = Dg = \mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f(x) = g(x)$

B) LA NOTATION $f \le g$

Soit f et g deux fonctions et I un intervalle inclus dans Df et dans Dg .

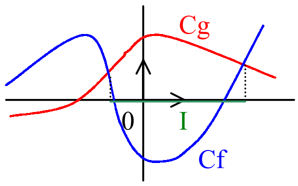
On dit que f est inférieure à g sur I, ce que l'on note $\mathbf{f \le g}$, si :

pour tout $x \in I$, $f(x) \le g(x)$

On définit de la même manière $\mathbf{f \ge g}$, $\mathbf{f > g}$ et $\mathbf{f < g}$.

Interprétation graphique :

La courbe représentative de f restreinte à I est au-dessous de la courbe représentative de g restreinte à I . (mais pas sur $\mathbb{R}$ . ..)



Rem : Soit un intervalle I inclus dans D f :

- Si la fonction f admet M comme majorant sur I , cela signifie que $f \le g$, avec $g : x \longmapsto M$, et par abus de langage , on note $f \le M$ sur I .
- Si $f \le 0$ sur I (on dit que f est négative sur I) , alors la courbe représentative de f restreinte à I est située sous l'axe (Ox) .
- De même si $f \ge 0$ …

7) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

A) OPERATIONS ALGEBRIQUES

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur Df et Dg , et k un réel non nul.

opération	**notation**	**définition**	**Definie pour :**
fonction **somme** de la fonction f et du réel k	**f + k**	$(f + k)(x) = f(x) + k$	$x \in Df$
fonction **produit** de la fonction f par le réel k	**k f**	$(k f)(x) = k \times f(x)$	$x \in Df$
fonction **somme** des fonctions f et g	**f + g**	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$x \in Df \cap Dg$
fonction **produit** des fonctions f et g	**f × g**	$(f g)(x) = f(x) \times g(x)$	$x \in Df \cap Dg$
fonction **différence** de la fonction f et de la fonction g	**f – g**	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$x \in Df \cap Dg$
fonction **inverse** de la fonction f	$\mathbf{\frac{1}{f}}$	$(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)}$	$x \in Df$ et $f(x) \neq 0$
fonction **quotient** de la fonction f par la fonction g	$\mathbf{\frac{f}{g}}$	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$x \in Df \cap Dg$ et $g(x) \neq 0$

Ex : On considère les fonctions $f : x \longmapsto -x+1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g : x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

- $f+g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $(f+g)(x) = -x+1+\frac{1}{x}$
- $f \times g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $(f \times g)(x) = (-x+1) \times \frac{1}{x} = -1+\frac{1}{x}$
- $5f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(5f)(x) = 5(-x+1) = -5x+5$

B) VARIATIONS (preuves en exercices)

Soit f et g deux fonctions monotones sur un intervalle I et k un réel non nul.

Les fonctions **f** et **f + k** ont le même sens de variation sur I .
Si $k > 0$, les fonctions **f** et **k f** ont le même sens de variation sur I . Si $k < 0$, les fonctions **f** et **k f** ont des sens de variation contraire sur I .
Si **f** et **g** sont strictement croissantes sur I , alors **f + g** est strictement croissante sur I . Si **f** et **g** sont strictement décroissantes sur I , alors **f + g** est strictement décroissante sur I

- $f - g = f + (-g)$ …
- Pour $f\,g$, il faut ajouter des hypothèses sur les signes de f et de g pour obtenir des résultats généraux.
- Pour $\frac{1}{f}$, nous utiliserons les compositions de fonctions.
- $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ …

8) COMPOSITION DE FONCTIONS

A) DEFINITION

Soit f et g deux fonctions . On appelle **fonction composée de f par g** , et on note **$g \circ f$** (lire « g rond f ») , la fonction définie par :

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

L'écriture $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ n'a de sens que si $x \in Df$ et $f(x) \in Dg$.
Ainsi dire que $x \in Dg \circ f$ revient à dire que $x \in Df$ et $f(x) \in Dg$.

Ex : On considère les fonctions $f : x \longmapsto x-1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g : x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

- $g \circ f$ est définie si, et seulement si, $x \in Df$ et $f(x) \in Dg$, ssi $x - 1 \neq 0$.
  Ainsi $Dg \circ f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et , pour tout $x \in Dg \circ f$:
  $(g \circ f)(x) = g(x-1) = \frac{1}{x-1}$
- $f \circ g$ est définie si, et seulement si, $x \in Dg$ et $g(x) \in Df$, ssi $x \neq 0$.
  Ainsi $Df \circ g = \mathbb{R}^*$ et , pour tout $x \in Df \circ g$:
  $(f \circ g)(x) = f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - 1$

En général $f \circ g \neq g \circ f$

B) VARIATIONS

Soit f et g deux fonctions, telles que f soit strictement monotone sur $I \subset Df$ et g soit strictement monotone sur $J \subset Dg$, avec pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.

- Si f et g ont même sens de variation, alors la fonction composée $g \circ f$ est strictement croissante sur I .
- Si l'une des fonctions est strictement décroissante et l'autre strictement croissante, alors la fonction composée $g \circ f$ est strictement décroissante sur I .

- Ce théorème est surtout intéressant quand les fonctions f et g sont strictement monotones sur tout leur ensemble de définition
- Le théorème est aussi valable si on enlève strictement …

Preuve partielle :

Supposons que f et g soient strictement croissantes respectivement sur I et sur J .

Soit u et v deux réels de I , tels que $u < v$;

f est strictement croissante sur I, donc $f(u) < f(v)$.

D'après les hypothèses , $f(u)$ et $f(v)$ appartiennet à J . De plus g est strictement croissante sur J , donc :

$g(f(u)) < g(f(v))$

Ainsi $g \circ f$ est strictement croissante sur I . *Pour les autres cas , la preuve est identique …*

Ex : Soit la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{1}{3\,x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

« L'expression $\dfrac{1}{3\,x^2}$ peut se schématiser $x \longmapsto 3\,x^2 \longmapsto \dfrac{1}{3\,x^2}$ »

Soit $f : x \longmapsto 3\,x^2$ et $g : y \longmapsto \dfrac{1}{y}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$h(x) = \frac{1}{f(x)} = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

De plus $D_{g \circ f} = D_h$

Ainsi $h = g \circ f$

- La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$, et l'image de cet intervalle par f est $f(\,]-\infty\,;0[\,) =]0\,;+\infty[$

De plus g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

On en déduit que $h = g \circ f$ est strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$.

- La fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, et l'image de cet intervalle par f est $f(\,]0\,;+\infty[\,) =]0\,;+\infty[$

De plus g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

On en déduit que $h = g \circ f$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Rem :

Voilà une méthode assez simple pour déterminer rapidement les variations de la fonction $\dfrac{1}{f}$ connaissant celles de la fonction f …