HOMOTHÉTIES et TRANSLATIONS

1) HOMOTHETIE DU PLAN

A) DEFINITION

Soit O un point du plan et k un réel non nul .
On appelle **homothétie** de centre O et de rapport k la transformation qui à chaque point M du plan fait correspondre le point M' tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = k\ \overrightarrow{OM}\ .$$

Notation:
Cette homothétie se note $h_{O,k}$ (ou h si il n'y a pas de confusion possible sur le centre et le rapport)
Soit M' l'image d'un point M par cette homothétie . On écrit :

$$h_{O,k}\ (M) = M' \quad \text{ou} \quad h_{O,k} : M \longmapsto M'$$

- Le centre de l'homothétie est sa propre image . (Il est **invariant** par h)
- On a OM' = | k | OM
- Dans une homothétie, un point, son image et le centre de l'homothétie sont alignés .

Ex :

Homothétie de centre O_1 et de rapport 2 . Homothétie de centre O_2 et de rapport -2 . Homothétie de centre O_3 et de rapport $\frac{1}{2}$.

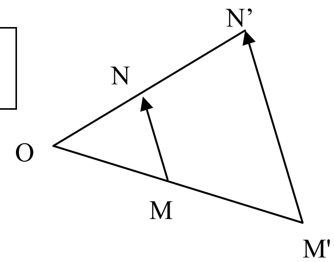
O_1 × M × O_2 × N × O_3 × P ×

Rem :
- Une homothétie de rapport 1 est l'identité du plan. (Pour tout point M, $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$)
- L'homothétie de centre O est de rapport – 1 est la symétrie de centre O. (Pour tout point M, $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$)

B) PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

- **Propriété fondamentale**

Si M' et N' sont les images de deux points M et N par une homothétie de rapport k , alors : $\overrightarrow{M'N'} = k\ \overrightarrow{MN}$



Preuve :
Soit O le centre de l'homothétie.
On a $\overrightarrow{OM'} = k\ \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON'} = k\ \overrightarrow{ON}$
Ainsi, d'après la relation de Chasles :
$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k\ \overrightarrow{ON} - k\ \overrightarrow{OM} = k\ (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = k\ \overrightarrow{MN}$

CONSEQUENCES :

- On a M'N' = | k | MN .

Une homothétie de rapport k muliplie donc les distances par le nombre positif | k |. (si | k | < 1, il y a réduction ; si | k | > 1 , il y a agrandissement)
- Si les points M et N sont distincts, alors les points M' et N' sont aussi distincts et les droites (MN) et (M'N ') sont parallèles.

2) ACTIONS DES HOMOTHETIES

- **Barycentre**

Une homothétie **conserve le barycentre**

Preuve : (avec trois points pondérés)
Soit G le barycentre de (A , a) , (B , b) et (C , c)
Soit A', B' , C' et G' les images de A, B , C et G par une homothétie de rapport k.
On a $\overrightarrow{G'A'} = k\ \overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{G'B'} = k\ \overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{G'C'} = k\ \overrightarrow{GC}$
Donc :
$a\ \overrightarrow{G'A'} + b\ \overrightarrow{G'B'} + c\ \overrightarrow{G'C'} = a\ k\ \overrightarrow{GA} + b\ k\ \overrightarrow{GB} + c\ k\ \overrightarrow{GC} = k\ (a\ \overrightarrow{GA} + b\ \overrightarrow{GB} + c\ \overrightarrow{GC}) = \overrightarrow{0}$
Donc G' est le barycentre de (A' , a) , (B', b) et (C' , c)

La démonstration est identique pour le barycentre de n points pondérés.

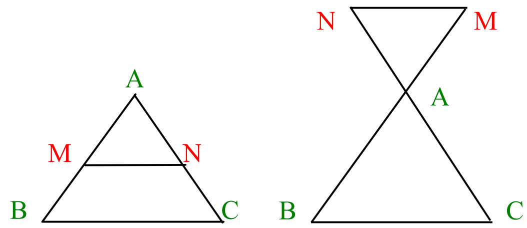
Rem:
- On peut démontrer de la même façon qu'une translation conserve le barycentre (Ce résultat est aussi vrai pour les autres transformations du plan)

- **Droites et segments**

- Si trois points A , B et C sont alignés, alors leurs images respectives A' , B' et C' par une homothétie sont alignés dans le même ordre. (**conservation de l'alignement**)
- Par une homothétie l'image d'une droite est une droite parallèle.
- Par une homothétie l'image d'un segment [AB] est un segment [A'B'] (où A' et B' sont les images de A et B) tel que A'B' = | k | AB . De plus le milieu I de [AB] a pour image le milieu I' de [A'B'] . (**conservation du milieu**)

Conséquences:
- L'image d'une droite est connue dès qu'est connue l'image d'un point de cette droite .
- Si deux droites sont parallèles, alors leurs images sont parallèles. (**conservation du parallélisme**)

- Si deux droites sont perpendiculaires, alors leurs images sont perpendiculaires. (**conservation de l'orthogonalité**)



❑ Triangles homothétiques :

Soit ABC et AMN deux triangles tels que $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ et $(MN) // (BC)$.
L'homothétie de centre A qui transforme B en M transforme aussi C en N.

Preuve :
Soit h l'homothétie de centre A qui transforme B en M.
Une homothétie conserve le parallélisme, donc h transforme la droite (BC) en la droite parallèle à (BC) et passant par M, c'est à dire (MN).
Ainsi $h (C) \in (MN)$
De plus $h (C) \in (AC)$; donc $h (C) = N$

On dit que les triangles ABC et AMN sont homothétiques de sommet commun A

❑ Angles (admis)

Une homothétie **conserve les angles orientés de vecteurs** .

❑ Triangles , quadrilatères et cercles

- Par une homothétie, la nature des triangles (isocèle, équilatéral, rectangle) et des quadrilatères (parallélogramme, losange, rectangle, carré) est conservée.
- Par une homothétie de rapport k l'image d'un cercle C de centre I et de rayon r est un cercle C' de centre I' (image de I par l'homothétie) et de rayon $| k | r$.

❑ Action sur les aires

Une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2 (admis)

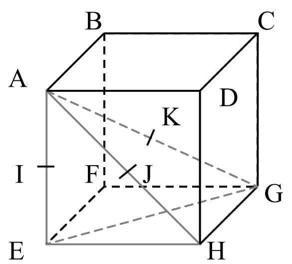
Cette propriété est facile à montrer dans le cas de figures simples pour lesquelles on connaît des formules pour calculer les aires. On l'admettra dans les autres cas.

3) TRANSLATIONS ET HOMOTHETIES DANS L'ESPACE

A) DEFINITION

Les définitions sont identiques à celles vues dans le plan . La seule différence est que l'on associe une image à tout point M de l'espace.

Ex :
I, J et K sont les milieux respectifs de [AE], [AH] et [A G]



- La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ associe à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

  $t_{\overrightarrow{AB}} (D) = C$, $t_{\overrightarrow{AB}} (E) = F$, $t_{\overrightarrow{AB}} (H) = G$
- L'homothétie $h_{(A ; 2)}$ associe à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = 2 \overrightarrow{AM}$

  $h_{(A ; 2)} (I) = E$, $h_{(A ; 2)} (J) = H$, $h_{(A ; 2)} (K) = G$

B) COMME DANS LE PLAN … (admis)

- Pour la translation, les propriétés vues en seconde dans le plan restent valables dans l'espace.
- Pour l'homothétie, les propriétés vues précédemment dans le plan restent valables dans l'espace.

C) PROPRIETES SUPPLEMENTAIRES (admises)

❑ Plan

- Une translation ou une homothétie conserve la coplanarité.
- L'image d'un plan par une translation ou une homothétie est un plan parallèle.

Rem :
- L'image d'un plan par une translation ou une homothétie est connue dès qu'est connue l'image d'un point de ce plan.
- Si deux plans sont parallèles, alors leurs images par une translation ou une homothétie sont parallèles.
- Si deux plans sont perpendiculaires, alors leurs images par une translation ou une homothétie sont perpendiculaires.
- Dans l'espace, un cercle (un triangle, un quadrilatère …) et son image par une translation ou une homothétie sont contenues dans des plans parallèles.

Sphère

- Par une translation l'image d'une sphère S de centre I et de rayon r est une sphère S' de centre I' (image de I par la translation) et de rayon r .
- Par une homothétie de rapport k l'image d'une sphère S de centre I et de rayon r est une sphère S' de centre I' (image de I par l'homothétie) et de rayon | k | r .

Volumes

- Une translation conserve les volumes
- Une homothétie de rapport k multiplie les volumes par $| k |^3$