CALCUL NUMERIQUE

1) ENSEMBLE DES NOMBRES

A) DEFINITIONS ET NOTATIONS

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **nombres entiers naturels .** $\mathbb{N} = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , ... \}$
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **nombres entiers relatifs (ou nombres entiers)** $\mathbb{Z} = \{ ... , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , ... \}$
- $\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux .** (nombres s'écrivant $n \times 10^{p}$ avec n et p dans $\mathbb{Z}$)
  Ex : $26 \times 10^{-2} = 0{,}26$; $-7 \times 10^{4} = -70000$
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels** . (nombres que l'on peut écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul)
  Ex : $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{8}$, $-\frac{5}{7}$
- On appelle **nombre irrationnel** tout nombre que l'on ne peut pas écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul)
  Ex: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels** , c'est à dire qui sont soit rationnels , soit irrationnels.

B) SYMBOLES D'INCLUSION

Soit A et B deux ensembles :

$A \subset B$ se lit : "A est inclus dans B" , "A est contenu dans B" ou "A est une partie de B"
$A \subset B$ signifie que tout élément de l'ensemble A appartient à l'ensemble B.

Si A n'est pas inclus dans B on note : $A \not\subset B$

Ex : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$ car par exemple $\frac{2}{5} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{2}{5} \notin \mathbb{Z}$

2) RAPPELS

A) PRODUITS

Soit a , b , c et d des réels :

REGLE DES SIGNES	• $a \times (-b) = (-a) \times b = -ab$ • $(-a) \times (-b) = ab$
PRODUIT NUL	Dire qu'un produit est nul signifie que l'un des facteurs au moins est nul
SIMPLIFICATION	Si $ac = bc$ et $c \neq 0$, alors $a = b$
DISTRIBUTIVITE	• $c(a+b) = ca + cb$ • $(a+b) \times (c+d) = ac + ad + bc + bd$
PRODUITS REMARQUABLES	• $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ • $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ • $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

B) QUOTIENTS

Soit a , b , c et d des réels avec c et d non nuls :

GENERALITES	$\frac{a}{1} = a$; $\frac{0}{c} = 0$; $\frac{a}{0} =$ impossible
REGLE DES SIGNES	$\frac{-a}{c} = \frac{a}{-c} = -\frac{a}{c}$; $\frac{-a}{-c} = \frac{a}{c}$
SIMPLIFICATION	$\frac{ad}{cd} = \frac{a}{c}$ **Attention :** $\frac{a+d}{c+d} \neq \frac{a}{c}$
EGALITE	$\frac{a}{c} = 0$ équivaut à $a = 0$; $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ équivaut à $ad = bc$
ADDITION	$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$; $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$
MULTIPLICATION	$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$
DIVISION	$\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$; $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$ (avec $b \neq 0$) ; $\frac{a}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{c}$; $\frac{\frac{a}{c}}{d} = \frac{a}{cd}$

C) PUISSANCES

Soit a et b des réels et p et q des entiers :

DEFINITION	$a^0 = 1$; $a^p = a \times a \times \ldots \times a$ (p facteurs , $p \geq 1$) ; $a^1 = a$ $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$; $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ ($a \neq 0$)
SIGNE	Pour p pair $(-a)^p = a^p$ et pour p impair $(-a)^p = -a^p$
REGLES DE CALCUL	Pour a et b non nuls : $a^p \times a^q = a^{p+q}$; $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$; $(a^p)^q = a^{pq} = (a^q)^p$ $(ab)^p = a^p \times b^p$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$
NOTATION SCIENTIFIQUE	La notation scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule et p est un entier . **Ex:** $0{,}0452 = 4{,}52 \times 10^{-2}$; $12478 = 1{,}2478 \times 10^4$

D) RACINES CARREES

DEFINITION	Lorsque a est un nombre positif , $\sqrt{a}$ désigne l'unique nombre positif dont le carré est égal à a . **<u>attention:</u>** un nombre négatif n'a pas de racine carrée .
REGLES DE CALCUL	Pour a et b positif : $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$ $\sqrt{a^p} = (\sqrt{a})^p$ (p entier naturel) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($b \neq 0$)
MISE EN GARDE	• Il n'existe pas de relation simple entre $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ • si $a < 0$ alors $\sqrt{a^2} = -a$
EQUATION $x^2 = a$	Soit a un réel , l'équation $x^2 = a$ • n'admet pas de solution si $a < 0$ • admet une unique solution 0 si $a = 0$ • admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a > 0$

3) LES NOMBRES PREMIERS

A) DIVISEUR D'UN NOMBRE ENTIER NATUREL

Soit $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$.
On dit que a est **divisible** par b si le résultat de la division de a par b est un nombre entier, c'est à dire :
$\dfrac{a}{b} = c$ (donc $a = bc$) où $c \in \mathbb{N}$

On dit alors que a est un **multiple** de b ou que b est un **diviseur** de a.

<u>Rem :</u> Tout nombre entier naturel non nul *a* admet au moins deux diviseurs, 1 et *a*.

<u>Ex :</u>
$12 = 4 \times 3 = 1 \times 12 = 6 \times 2$
4, 3, 1, 12, 6 et 2 sont des diviseurs de 12
Par contre 5 n'est pas un diviseur de 12 car $12 \div 5 \notin \mathbb{N}$

B) NOMBRES PREMIERS

<u>Un nombre premier</u> est un entier naturel qui admet <u>exactement</u> deux diviseurs : 1 et lui-même

<u>Ex :</u>
12 n'est pas premier
5 est premier

Rem:

- Par convention 1 n'est pas premier.
- 2 est le seul nombre premier pair.
- Il y a un infinité de nombres premiers
- Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100 sont :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97. (voir crible d'Eratosthène)

C) DECOMPOSITION EN PRODUIT DE FACTEURS PREMIERS

Tout entier supérieur ou égal à 2 est premier ou produit de facteurs premiers.

Rem :

- Lorsqu'on écrit un entier comme produit de facteurs premiers, on dit qu'on **décompose** cet entier en produit de facteurs premiers.
- On peut démontrer que cette décomposition est unique.

Ex :

- $28 = 2 \times 14 = 2 \times 2 \times 7 = 2^2 \times 7$

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

- $60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

D) APPLICATION

- **Simplifier une fraction :** $A = \dfrac{56 \times 67}{14 \times 24}$

On décompose chacun des nombres 56, 67, 14 et 24.

$56 = 2 \times 28 = 2 \times 2 \times 14 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 2^3 \times 7$

67 est un nombre premier

$14 = 2 \times 7$ et $24 = 2 \times 12 = 2 \times 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

On en déduit : $A = \dfrac{2^3 \times 7 \times 67}{2 \times 7 \times 2^3 \times 3} = \dfrac{67}{6}$

- **Simplifier une expression avec des racines carrées :** $B = \sqrt{63} \times \sqrt{105}$

On décompose chacun des nombres 63 et 105.

$63 = 3 \times 21 = 3 \times 3 \times 7 = 3^2 \times 7$ et $105 = 3 \times 35 = 3 \times 5 \times 7$

On en déduit : $B = \sqrt{63 \times 105} = \sqrt{3^2 \times 7 \times 3 \times 5 \times 7} = 3 \times 7\sqrt{3 \times 5} = 21\sqrt{15}$.

- **Faire la somme ou la différence de deux fractions :** $C = \dfrac{3}{50} + \dfrac{8}{105} - \dfrac{5}{42}$

On doit mettre ces trois fractions au même dénominateur (on va chercher le plus petit multiple commun à 50, 105 et 42)

$50 = 2 \times 5^2$; $105 = 3 \times 5 \times 7$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$

Le plus petit multiple commun des dénominateurs est alors : $2 \times 3 \times 5^2 \times 7$, et on obtient :

$$C = \frac{3 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 5^2 \times 7} + \frac{8 \times 2 \times 5}{2 \times 3 \times 5^2 \times 7} - \frac{5 \times 5^2}{2 \times 3 \times 5^2 \times 7} = \frac{63 + 80 - 125}{2 \times 3 \times 5^2 \times 7} = \frac{18}{2 \times 3 \times 5^2 \times 7} = \frac{2 \times 3^2}{2 \times 3 \times 5^2 \times 7} = \frac{3}{5^2 \times 7} = \frac{3}{175}$$