FONCTIONS AFFINES

1) DEFINITION D'UNE FONCTION AFFINE

Soit a et b deux réels.

Toute fonction f telle que $f : x \longmapsto a x + b$ est appelée **fonction affine**.

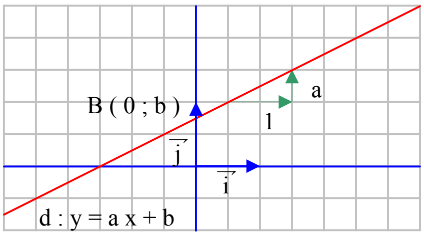
Son ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}$

Ex :
$f : x \longmapsto -3x + 1$ est une fonction affine où $a = -3$ et $b = 1$

Rem
- **Une fonction linéaire** est une fonction affine particulière . (cas où $b = 0$)
  Ex : $x \longmapsto 3x$
- La fonction affine $x \longmapsto b$ (cas où $a = 0$) est appelée **fonction constante** .
  Ex : $x \longmapsto 5$

2) REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION AFFINE

Dans un repère, **la représentation graphique** de la fonction affine $f : x \longmapsto a x + b$ est une **droite.**
- $y = a x + b$ est **l'équation réduite** de la droite.
- a est **le coefficient directeur** de la droite.
- b est **l'ordonnée à l'origine** de la droite *(On a* $f(0) = b$ *. La droite passe donc par le point* B *de coordonnées* $(0 ; b)$ *)*



Rem :
- Dans le cas d'une **fonction linéaire**, la droite d'équation $y = ax$ passe par l'origine du repère. *(L'image est proportionnelle à la variable)*
- Dans le cas d'une **fonction constante**, la droite d'équation $y = b$ est parallèle à l'axe des abscisses. *(L'image est constamment égale à b)*
- Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées représente une fonction affine.

3) SENS DE VARIATION

Soit a et b deux réels et la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto a x + b$
- si $a > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- si $a < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- si $a = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$

Preuve :
Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$

Si $a > 0$
$a x_1 < a x_2$
$\Leftrightarrow a x_1 + b < a x_2 + b$
$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Si $a < 0$
$a x_1 > a x_2$
$\Leftrightarrow a x_1 + b > a x_2 + b$
$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
On en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Si $a = 0$ alors $f(x_1) = b = f(x_2)$ et donc f est constante.

Ex :
$f : x \longmapsto \frac{2}{3}x - 4$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car $\frac{2}{3} > 0$

$g : x \longmapsto 2 - \frac{2}{7}x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ car $-\frac{2}{7} < 0$

4) PROPORTIONNALITE DES ACCROISSEMENTS

Une fonction f est une fonction affine si, et seulement si , pour tous réels distincts x_1 et x_2 , on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Ce qui revient à dire que l'accroissement Δy de l'image est proportionnel à l'accroissement Δx de la variable et que le coefficient de proportionnalité est a.

Preuve :

- Soit a et b deux réels et la fonction affine f définie sur IR par $f : x \longmapsto a\,x + b$

  Pour tous réels distincts x_1 et x_2 on a :
  $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = (a\,x_2 + b) - (a\,x_1 + b) = a\,(x_2 - x_1) = a\,\Delta x$

- Soit f une fonction telle que pour tous réels distincts x_1 et x_2 , $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$

  En particulier pour tout réel x et pour le réel 0 , d'image f (0) = b , on obtient :
  $f(x) - b = a\,(x - 0) \Leftrightarrow f(x) = a\,x + b$
  On en déduit que f est une fonction affine.

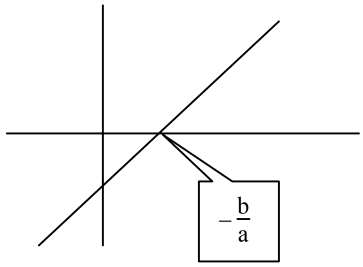
5) SIGNE DU BINOME ax + b (a ≠ 0)

Soit a et b deux réels et la fonction affine f définie sur IR par $f : x \longmapsto a\,x + b$

Si **a > 0**

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

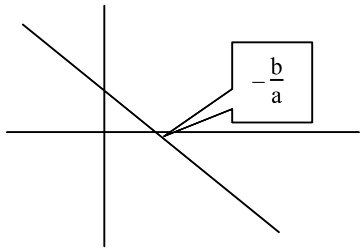
$$\begin{aligned} & f(x) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & ax + b > 0 \\ \Leftrightarrow\ & ax > -b \\ \Leftrightarrow\ & x > -\frac{b}{a} \\ \Leftrightarrow\ & x \in \left]-\frac{b}{a} ; +\infty\right[\end{aligned}$$



Si **a < 0**

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	

$$\begin{aligned} & f(x) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & ax + b > 0 \\ \Leftrightarrow\ & ax > -b \\ \Leftrightarrow\ & x < -\frac{b}{a} \\ \Leftrightarrow\ & x \in \left]-\infty ; -\frac{b}{a}\right[\end{aligned}$$



Pour résumer :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f		Opposé du signe de a	0	Signe de a	

Ces tableaux sont appelés tableaux de signes de f (x) = a x + b

Attention :
Il n'y a pas de rapport entre le tableau de signes et le tableau de variations d'une fonction f (une fonction croissante n'est pas forcément positive)