VECTEURS

Dans tout le chapitre $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$ designent des vecteurs et a, b et k désignent des réels.

1) EGALITE VECTORIELLE

A) DIRECTION - SENS

Si deux droites sont parallèles, on dit qu'elles ont même **direction** . (Deux droites sécantes n'ont pas la même direction)
Soit A et B deux points distincts . Il y a deux **sens** de parcours sur la droite (AB) : de A vers B ou de B vers A.

B) VECTEURS

Deux points distincts A et B définissent deux **vecteurs** notés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$.
On dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$:
- a pour **direction** , la direction de la droite (AB)
- a pour **sens** , le sens de A vers B
- a pour **longueur** AB .

Rem :
- La longueur AB s'appelle **la norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$; on la note $\|\overrightarrow{AB}\|$; ainsi $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont différents ; ils n'ont pas le même sens.
  On écrit $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. On dit qu'ils sont **opposés**.
- Lorsque les points A et B sont confondus, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé **vecteur nul**.
  On le note $\vec{0}$. Ainsi $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (Le vecteur nul n'a pas de direction et sa longueur est nulle)

C) VECTEURS EGAUX

Chacune des propriétés suivantes signifie que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction, même sens et même norme.
- ABDC est un parallélogramme. (ou [AD] et [BC] ont même milieu)
- C'est la même translation qui amène A sur B et C sur D .

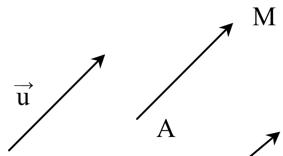
Rem :
- Si A,B,C et D sont alignés, on dit que ABDC est un parallélogramme aplati.
- Si l'on sait que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$, alors M = N
- Si M' et N' sont les images de deux points M et N par une translation, alors $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.

D) AUTRE NOTATION

On désigne parfois une droite (AB) par une seule lettre, par exemple d ou Δ .
De même, on désigne souvent un vecteur par une seule lettre, en général $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et on écrit par exemple $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

E) REPRÉSENTATION D'UN VECTEUR

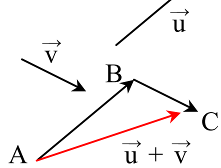
Soit $\vec{u}$ un vecteur donné et A un point du plan . Il existe un point M unique tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.



2) SOMME ET DIFFERENCE DE DEUX VECTEURS

A) SOMME DE DEUX VECTEURS

On appelle **vecteur somme** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur, noté $\vec{u}+\vec{v}$, définit de la façon suivante :
A étant un point arbitraire, soit B et C les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, alors $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

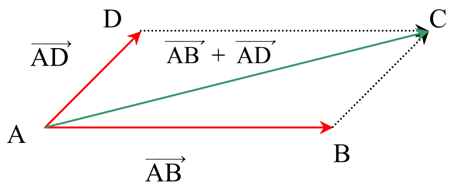


On en déduit la relation suivante :

Relation de Chasles :
Pour tout point A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

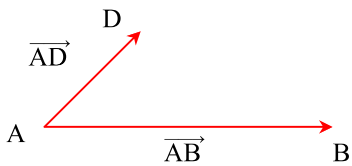
B) Une méthode de construction du vecteur somme : LA REGLE DU PARALLELOGRAMME

Si ABCD est un parallélogramme, **alors** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



Preuve :
ABCD est un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
Ainsi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Rem :
Lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont dessinés avec une origine commune A, il suffit de dessiner le parallélogramme ABCD pour obtenir le vecteur somme de ces deux vecteurs.



C) PROPRIETES

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- si $\vec{u} = \vec{v}$ et si $\vec{w} = \vec{z}$, alors $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{z}$

D) DIFFERENCE DE DEUX VECTEURS

On appelle **vecteur différence** du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ le vecteur, noté $\vec{u} - \vec{v}$, définit de la façon suivante :

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ (où $-\vec{v}$ est l'opposé de $\vec{v}$)

Ex:
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$ c'est à dire $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

3) PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN REEL

A) PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN REEL

On appelle **produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k** le vecteur, noté $k\,\vec{u}$, définit de la façon suivante :

- Si $k > 0$ et si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $k\,\vec{u}$ désigne le vecteur de même direction que $\vec{u}$, de même sens que $\vec{u}$ et de norme $k\,\|\vec{u}\|$
- Si $k < 0$ et si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $k\,\vec{u}$ désigne le vecteur de même direction que $\vec{u}$, de sens contraire à $\vec{u}$ et de norme $-k\,\|\vec{u}\|$
- Si $k = 0$ ou si $\vec{u} = \vec{0}$, $k\,\vec{u}$ désigne le vecteur nul

B) PROPRIETES

- $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\,\vec{u} + a\,\vec{v}$ et $a(\vec{u} - \vec{v}) = a\,\vec{u} - a\,\vec{v}$
- $(a + b)\,\vec{u} = a\,\vec{u} + b\,\vec{u}$ et $(a - b)\,\vec{u} = a\,\vec{u} - b\,\vec{u}$
- $a(b\,\vec{u}) = (a\,b)\,\vec{u}$
- Si $k\,\vec{u} = \vec{0}$ alors $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
- Si $k \neq 0$ et si $k\,\vec{u} = k\,\vec{v}$, alors $\vec{u} = \vec{v}$

Ex:

- $2\,\overrightarrow{AB} + 5\,\overrightarrow{AB} = 7\,\overrightarrow{AB}$
- $0{,}5\,(2\,\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$
- $3\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 3\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AC}$
- Si $(a - 2)\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, alors $a = 2$ ou $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

C) VECTEURS COLINEAIRES

Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie que :

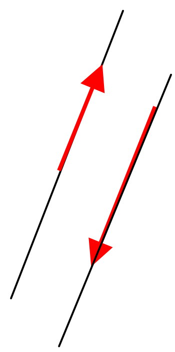
- l' un des vecteurs est nul

ou

- les deux vecteurs étant non nuls, il existe un reel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$

Points alignés :

Trois points A , B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



Droites parallèles :

Soit d une droite . On appelle **vecteurs directeurs** de d les vecteurs, non nuls, définis par deux points de d.
Deux vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires.
Deux droites d et d' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

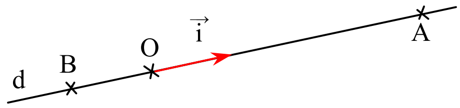
4) REPERAGE DES POINTS ET VECTEURS

A) REPERAGE DES POINTS ET VECTEURS D'UNE DROITE

Soit d une droite.
On appelle **repère de la droite** d tout couple (O ; $\vec{i}$) où :

- O est un point de la droite d appelé origine
- $\vec{i}$ est un vecteur directeur de d

Soit M un point de d . Le nombre x_M définit par $\overrightarrow{OM} = x_M\,\vec{i}$ est appelé **l'abscisse** du point M dans le repère (O ; $\vec{i}$)



Ex:
$\overrightarrow{OA} = 3\,\vec{i}$ donc $x_A = 3$
$\overrightarrow{OB} = -\,\vec{i}$ donc $x_B = -1$

B) REPERAGE DES POINTS ET VECTEURS DU PLAN

a) REPERAGE DANS UNE BASE

Deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires, pris dans cet ordre, forment une **base** des vecteurs du plan, notée ($\vec{i}$, $\vec{j}$)

Soit ($\vec{i}$, $\vec{j}$) une base des vecteurs du plan.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple (x ; y) de réels tel que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.
On dit que x et y sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$).

On note : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}$ (x ; y)

Ex:
Dans une base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) donnée :
- les vecteurs de coordonnées (0 ; y) sont les vecteurs colinéaires à $\vec{j}$
- le vecteur de coordonnées (0 ; 0) est le vecteur nul

b) PROPRIETES

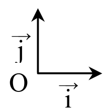
Soit ($\vec{i}$, $\vec{j}$) une base des vecteurs du plan , $\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x' ; y ') deux vecteurs . Alors:
- $\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à x = 0 et y = 0
- $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à x = x' et y = y'
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées (x + x' ; y + y')
- k $\vec{u}$ (k réel) a pour coordonnées (k x ; k y)

Preuve partielle :
On a $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}$
Ainsi $\vec{u} + \vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} = (x + x')\,\vec{i} + (y + y')\,\vec{j}$
Donc $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées (x + x' ; y + y')

Ex :
Dans une base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) , on considère les vecteurs $\vec{u}$ (2 ; 3) et $\vec{v}$ (5 ; – 2) .
On a alors : $\vec{u} + \vec{v}$ (7 ; 1) 3 $\vec{v}$ (15 ; – 6) 2 $\vec{u}$ – 3 $\vec{v}$ (– 11 ; 12)

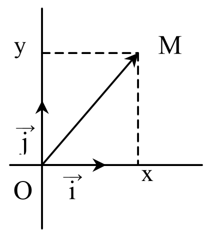
c) REPERE DU PLAN

On appelle repère du plan tout triplet (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) où :
- O est un point du plan (appelé origine du repère)
- ($\vec{i}$, $\vec{j}$) est une base des vecteurs du plan



Rem :
La définition d'un repère telle qu'elle est connue au collège (*un repère est un triplet* (O , I , J) *de points non alignés)* n'est pas remise en cause. En effet :
- Si (O , I , J) sont non alignés, les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ forment une base.
- A chaque repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) on peut associer le triplet (O , I , J) où I et J sont définis par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$

Soit (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan et M un point quelconque . Les trois phrases suivantes sont équivalentes :
- $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$
- M a pour coordonnées (x ; y)
- $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées (x ; y)



x est **l'abscisse** du point M et y est **l'ordonnée** du point M .

Soit (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan , A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) deux points du plan :
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$)
- Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées (x_M ; y_M) données par:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

d) COLINEARITE

Soit ($\vec{i}$, $\vec{j}$) une base , $\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x' ; y') deux vecteurs du plan, alors :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à $xy' - x'y = 0$

Preuve :
- Si l'un des vecteurs est le vecteur nul, le résultat est évident.
- Si les deux vecteurs sont non nuls, dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire qu'il existe un reél k tel que :

$$\vec{v} = k\,\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = k\,x \\ y' = k\,y \end{cases}$$

Les coordonnées sont donc proportionnelles et on a alors :
$x\,y' = y\,x' \Leftrightarrow x\,y' - y\,x' = 0$

Rem :
L'expression $xy' - x'y$ est appelée **déterminant** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$. Elle est notée det ($\vec{u}$, $\vec{v}$)
Une disposition pratique en tableau peut aider à retenir ce nombre.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Ex:
Dans une base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) , on considère les vecteurs $\vec{u}$ (2,3 ; 4,7) et $\vec{v}$ (11,5 ; 23,5)
On a $2,3 \times 23,5 - 11,5 \times 4,7 = 54,05 - 54,05 = 0$
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

e) VECTEURS ORTHOGONAUX, REPERE ORTHOGONAL, REPERE ORTHONORMAL

Deux vecteurs (non nuls) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de directions perpendiculaires sont appelés **vecteurs orthogonaux** et l'on écrit $\vec{u} \perp \vec{v}$.
Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Une base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) (un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$)) est **orthogonale** si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux.

Une base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) (un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$)) est **orthonormale (ou orthonormée)** si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et de même norme 1 (c'est à dire **unitaires**).

f) NORME ET DISTANCE

Soit A et B deux points de coordonnées respectives (x_A ; y_A) et (x_B ; y_B) **dans un repère orthonormé**.
On a :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \qquad \text{et} \qquad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Rem : Ces résultats se démontrent à l'aide du théorème de Pythagore.