FONCTIONS INVERSES ET HOMOGRAPHIQUES

1) LA FONCTION INVERSE

A) DÉFINITION et VARIATIONS

Définition :

La fonction définie sur $\left]-\infty\,;0\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$ qui à tout nombre réel x non nul associe son inverse $\frac{1}{x}$, est appelée **fonction inverse**.

Remarques :

- Le nombre 0 n'appartient pas au domaine de définition de la fonction inverse car on ne peut pas diviser par 0.
- La fonction inverse n'est pas linéaire.

Propriété :

La fonction inverse $g : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est **strictement décroissante** sur $\left]-\infty\,;0\right[$.

La fonction inverse $g : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est **strictement décroissante** sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

Preuve :

Soit deux réels a et b de l'ensemble de définition de la fonction inverse $g : x \longmapsto \frac{1}{x}$ tels que $a<b$. On a alors:

$$g(a)-g(b)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$$

1er cas: $a<b<0$

$b-a>0$ puisque $a<b$,
$ab>0$ puisque c'est le produit de deux nombres de même signe.

On en déduit que : $\frac{b-a}{ab}>0$

$\Leftrightarrow \quad g(a)-g(b)>0$

$\Leftrightarrow \quad g(a)>g(b)$

Les images de a et b par la fonction inverse sont donc rangées dans l'ordre contraire de a et de b, ce qui démontre que la fonction inverse est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;0\right[$.

2ème cas: $0<a<b$

Démonstration identique

Remarques :

- Deux nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.
- Deux nombres strictement négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

Le **tableau des variations** de la fonction inverse est donc:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g	$\searrow$	‖	$\searrow$

La double barre verticale en 0 est là pour signifier que la fonction inverse n'est pas définie en 0.

B) REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

x	-4	-3	-2	-1	$-0{,}5$	$-0{,}25$	$0{,}25$	$0{,}5$	1	2	3	4
$g(x)=\frac{1}{x}$	$-0{,}25$	$-\frac{1}{3}$	$-0{,}5$	-1	-2	-4	4	2	1	$0{,}5$	$\frac{1}{3}$	$0{,}25$

Définition :

Dans un repère orthogonal $(O\,,I\,,J)$, la courbe représentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole** d'équation $y=\frac{1}{x}$. (Elle est souvent notée $\mathcal{H}$)

Propriété :

Dans un repère orthogonal, l'hyperbole $\mathcal{H}$ représentant la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine $O\,(0\,;\,0)$ du repère.

Preuve :

Soit un point $M\,(x\,;\,y)$ appartenant à $\mathcal{H}$. On a alors $y=\dfrac{1}{x}$.

Le symétrique de M par rapport à O est le point $M'\,(-x\,;-y)$.
Or $\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}=-y$, donc M' appartient aussi à $\mathcal{H}$.
Ainsi pour tout point M de $\mathcal{H}$, son symétrique par rapport à O appartient aussi à $\mathcal{H}$. On en déduit que $\mathcal{H}$ est symétrique par rapport à O.

2) FONCTIONS HOMOGRAPHIQUES

Définition :

Soit a, b, c et d quatre nombres réels avec c et $ad-bc$ non nuls.
On appelle **fonction homographique**, toute fonction qui à tout réel $x\neq-\dfrac{d}{c}$, associe le réel $\dfrac{ax+b}{cx+d}$

La fonction inverse est un cas particulier de cette famille de fonction.

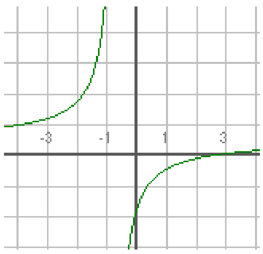
Remarque :
Si $ad-bc=0$, la fonction étudiée est constante.

Définition :

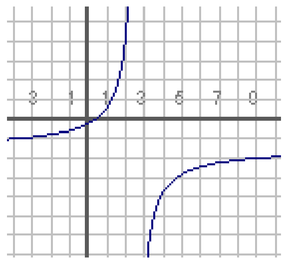
Dans un repère orthogonal $(O\,,I\,,J)$, la courbe représentative d'une fonction homographique est appelée **hyperbole**.

Exemples :

Représentation de $f:x\longmapsto\dfrac{2x-5}{4x+3}$



Représentation de $g:x\longmapsto\dfrac{-3x+1}{2x-5}$



3) ÉQUATION QUOTIENT – INÉQUATION QUOTIENT

Propriété :

Soit a, b, c et d quatre nombres réels avec c et $ad-bc$ non nuls.
L'équation quotient $\dfrac{ax+b}{cx+d}=0$ n'a de sens que pour $x\neq-\dfrac{d}{c}$.
Cette équation admet pour unique solution $-\dfrac{b}{a}$.

$\dfrac{A}{B}=0\Leftrightarrow A=0$ et $B\neq0$

Exemple :

Pour $x\neq\dfrac{5}{2}$, l'unique solution de $\dfrac{-3x+1}{2x-5}=0$ est $x=\dfrac{1}{3}$. (Résultat que l'on retrouve sur le graphique)

Propriété :

- Le quotient de deux réels de même signe est positif.
- Le quotient de deux réels de signes contraires est négatif.

Soit a , b , c et d quatre nombres réels avec c et $ad-bc$ non nuls.
Pour résoudre l'inéquation $\frac{ax+b}{cx+d}<0$, on étudie séparément les signes de $ax+b$ et de $cx+d$, puis à l'aide d'un tableau de signes on détermine le signe du quotient $\frac{ax+b}{cx+d}$.

La méthode est identique pour $\frac{ax+b}{cx+d}\geqslant 0$, $\frac{ax+b}{cx+d}\leqslant 0$ et $\frac{ax+b}{cx+d}>0$

Exemple :
Résolution de $\frac{-3x+1}{2x-5}<0$

A l'aide d'un tableau de signes, on étudie successivement les signes de $-3x+1$ et $2x-5$.
On en déduit le signe de $\frac{-3x+1}{2x-5}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-3x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-3x+1}{2x-5}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc S = $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[\cup\left]\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$. (Résultat que l'on retrouve sur le graphique)