

L'enroulement de la droite numérique

(consulter trigonometrie_geo1.html)

Ex 1 : QCM

Dans chaque question, déterminer la (ou les) bonne(s) réponses.

- 1) Le sens trigonométrique est :
 a) le sens des aiguilles d'une montre ; b) le sens direct ;
 c) le sens inverse des aiguilles d'une montre ; d) le sens indirect.

- 2) Le cercle trigonométrique est tel que :
 a) son rayon vaut π b) son diamètre vaut 2
 c) son périmètre vaut 360° d) son périmètre vaut 2π

- 3) Si un segment est enroulé dans le sens trigonométrique autour du cercle trigonométrique les longueurs associées seront :
 a) positives b) négatives c) de signe quelconque

- 4) Après enroulement sur le cercle trigonométrique, deux points x et y de la droite numérique :
 a) espacés de 3π ne sont pas situés sur le même point du cercle.
 b) espacés de 360° ne sont pas situés sur le même point du cercle.
 c) sont situés sur le même point du cercle que s'ils sont espacés d'un multiple de 2π .
 d) espacés de 0° sont situés sur le même point du cercle.

Ex 2 : Vrai ou faux

- Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique.
 1) Après enroulement sur le cercle trigonométrique, tous les points de la droite numérique correspondant aux réels du type $k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ coïncident avec le point I.
 2) Après enroulement sur le cercle trigonométrique, tous les points de la droite numérique correspondant aux réels du type $\pi + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ coïncident avec le point I.

- 3) Après enroulement sur le cercle trigonométrique, aucun point de la droite numérique ne peut correspondre au point O.

- 4) Après enroulement sur le cercle trigonométrique dans le sens direct, tous les points de la droite numérique correspondant aux réels du type $\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ coïncident avec le point J.

Ex 3 : Longueurs d'arcs de cercle

Calculer les longueurs d'arcs de cercle dans les cas suivants :

- 1) Un arc de cercle de diamètre 5 cm et d'angle 45° .
 2) Un arc de cercle d'angle 210° et de rayon unitaire.
 3) Un arc de cercle de rayon 20 cm et d'angle 90° .
 4) Un arc de cercle de rayon unitaire et d'angle 150° .

Ex 4 : Angle au centre

Sur un cercle de rayon R, déterminer la mesure en degré des angles des arcs de cercle de longueur L dans chacun des cas suivants :

- 1) $R=5$ et $L=\pi$ 2) $R=0,5$ et $L=\frac{\pi}{6}$ 3) $R=10$ et $L=\frac{20\pi}{3}$

Ex 5 : Se repérer sur le cercle trigonométrique

Placer sur le cercle trigonométrique les points ci-dessous correspondants, après enroulement autour du cercle trigonométrique, aux abscisses suivantes de la droite numérique :

points	A	B	C	D	E	F	G	H
abscisses	0	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	-2000π	$\frac{7\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{4}$	11π

Ex 6 : Cadran d'horloge

Un cadran d'horloge dispose de deux aiguilles . Celle des minutes mesure 12 cm et celle des heures 6 cm.

Calculer la distance parcourue par l'extrémité de la grande aiguille depuis midi lorsqu'il est :

- 1) 12h05 2) 12h25 3) 13h15 4) 16h32

Sinus et cosinus d'un nombre réel

Ex 7 : Vrai ou faux

Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique. Soit M le point du cercle trigonométrique correspondant à x après enroulement de la droite numérique.

- 1) L'abscisse du point M est $\sin x$.
 2) L'ordonnée du point M est $\sin x$.
 3) La longueur du segment [OM] est 2π .
 4) L'ordonnée du point M est comprise entre -1 et 1.
 5) L'abscisse du point M est positive.

Ex 8 : Vrai ou faux

Soit x un réel quelconque.

- 1) $\cos x + \sin x = 1$ 5) $0 \leq \cos x \leq 1$
 2) $-1 \leq \sin x \leq 1$ 6) $\cos x \leq \sin x$
 3) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 7) $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $k \in \mathbb{R}$
 4) $\cos(-x) = \sin x$ 8) $\sin(-x) = -\sin(x)$

Ex 9 : Calculs

Calculer les sinus et les cosinus des réels suivants :

- 1) $\frac{5\pi}{6}$ 2) $-\frac{11\pi}{2}$ 3) $-\frac{7\pi}{3}$ 4) $\frac{9\pi}{4}$ 5) $-\frac{\pi}{6}$ 6) $\frac{1947\pi}{2}$

Ex 10 : Calculs

Calculer la valeur du produit $\cos x \times \sin y$ dans les cas suivants :

- 1) $x=0$ et $y=\pi$ 2) $x=\frac{\pi}{3}$ et $y=\frac{\pi}{3}$ 3) $x=0$ et $y=-\frac{\pi}{4}$
 4) $x=\pi$ et $y=-\frac{\pi}{2}$ 5) $x=527$ et $y=240\pi$ 6) $x=\frac{17\pi}{2}$ et $y=17$

Ex 11 : Déterminer un réel correspondant à une valeur remarquable de sinus ou de cosinus

Déterminer les solutions réelles des équations suivantes :

- 1) $\sin x = 0$ 2) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 5) $2 \cos x = 1$ 6) $\cos x + \sin x = 7$ 7) $\cos x + 3 = 2$ 8) $4 \sin x = -2$

Ex 12 : Déterminer un réel connaissant son sinus ou son cosinus

Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près d'un réel x vérifiant :

- 1) $\cos x = \frac{1}{4}$ 2) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 3) $3 \sin x = 1$
 4) $\cos^2 x = 1 - \sqrt{2}$ 5) $\sin(x - \pi) = \frac{\pi}{3}$ 6) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ex 13 : Système d'équations

Déterminer les solutions réelles des systèmes d'équations suivants :

- 1) $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Ex 14 : Trigonométrie et géométrie

Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique. Soit M,N,P et Q les points dont les coordonnées sont données ci-dessous. α et β sont deux réels. Pour chaque point, déterminer s'ils sont situés à l'intérieur du cercle trigonométrique, sur le cercle, ou à l'extérieur du cercle.

M($\sin \alpha$; $\cos \alpha$) N($-0,5 \cos \alpha$; $0,5 \sin \alpha$)

P($\cos \alpha - \sin \alpha$; $\sin \alpha + \cos \alpha$)

Q($\cos \alpha \times \cos \beta - \sin \alpha \times \sin \beta$; $\sin \alpha \times \cos \beta + \cos \alpha \times \sin \beta$)

Ex 15 : Équation produit

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1) En remarquant que $(\cos x - \sin x)^2 \geq 0$, en déduire que :

$$\cos x \times \sin x \leq \frac{1}{2}$$

2) De la même façon, en développant $(\cos x + \sin x)^2$, montrer que :

$$-\cos x \times \sin x \leq \frac{1}{2}$$

3) En déduire que pour tout réel x , on a :

$$-\frac{1}{2} \leq \cos x \times \sin x \leq \frac{1}{2}$$

L'équation $\cos x \times \sin x = 1$ a-t-elle une solution ?

Ex 16 : Représentation graphique

Soit f et g les fonctions définies sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sin x$.

1) dresser un tableau de valeurs des fonctions f et g sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ avec un pas de 0,2 (on donnera des valeurs approchées à 10^{-1} près)

2) Tracer dans un même repère avec la calculatrice puis à la main, les représentations graphiques des fonctions f et g .

Ex 17 : Maximiser l'aire d'un trapèze – GeoGebra

(consulter trigonometrie_geo18.html)

Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique. Soit M un point du cercle trigonométrique appartenant à l'arc IJ (extrémités exclues), et N son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Soit K le symétrique de I par rapport à l'axe des ordonnées.

1) Réaliser la figure à l'aide de GeoGebra.

2) Montrer que l'aire du trapèze MNKI vaut $\sin \alpha (1 + \cos \alpha)$, où α désigne la valeur de l'angle \widehat{IOM} .

3) Où placer le point M sur l'arc IJ afin que l'aire du trapèze MNKI soit maximale ? (on ne demande pas de le justifier, mais juste d'indiquer la démarche utiliser avec GeoGebra)

Toujours avec GeoGebra, relever l'aire maximale, ainsi que l'angle \widehat{IOM} où cette valeur est atteinte.

Ex 18 : Algorithme

(consulter trigonometrie_algo19_1.htm et trigonometrie_algo19_2.htm)

1) Écrire un algorithme qui affiche la valeur de $\sin 0^\circ$, $\sin 1^\circ$, $\sin 2^\circ$ jusqu'à $\sin 90^\circ$.

2) On cherche à trouver un intervalle du type $[n, n+1]$ avec n entier compris entre 0 et 89 contenant une des solutions de l'équation $\sin x = 0,3$.

En admettant que l'entier cherché soit tel que $\sin n \leq 0,3 < \sin(n+1)$, proposer un algorithme affichant cet entier.

3) Modifier l'algorithme trouvé à la question précédente afin qu'il puisse s'intéresser à l'équation $\sin x = a$ dans laquelle a est saisi par l'utilisateur et appartient à l'intervalle $]0; 1[$.