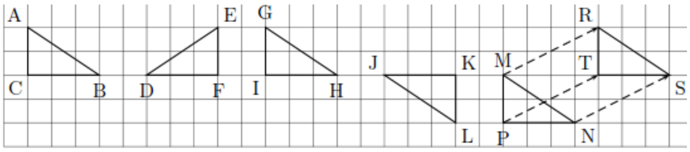
Translations et vecteurs

Ex 1 : ***Une nouvelle transformation***



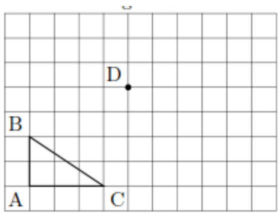
1) Le triangle DEF est l'image du triangle ABC par une transformation. Laquelle?

2) Le triangle JKL est l'image du triangle GIH par une transformation. Laquelle?

3) Le triangle RST est l'image du triangle MNP par une transformation inconnue jusqu'à présent . Caractériser cette transformation.

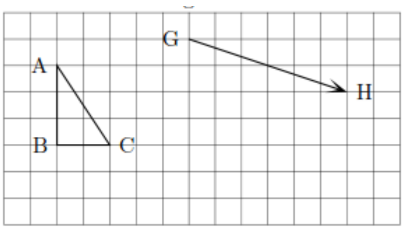
Ex 2 : ***Image d'un triangle***

On translate le triangle ABC de façon à amener le point A sur le point D. Tracer DEF l'image du triangle ABC par cette translation

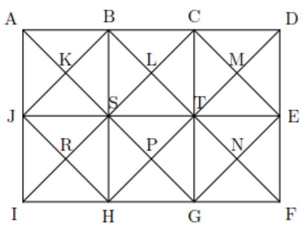


Ex 3 : ***Image d'un triangle***

Tracer le triangle DEF, image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{GH}$.



Ex 4 : ***Image d'une figure***



1) Quelle est l'image du triangle AJS par la translation qui transforme A en T ?
......

2) Quelle est l'image du triangle STG par la translation de vecteur $\overrightarrow{JB}$?
......

3) Quelle est l'image du rectangle BDES par la translation qui transforme B en J ? ......

4) Quelle est l'image du triangle TNG par la translation de vecteur $\overrightarrow{SB}$
......

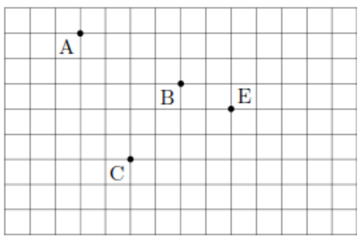
Égalité de deux vecteurs

Ex 5 : ***Caractériser l'égalité de deux vecteurs***

1) Tracer le point D image du point C par la translation qui transforme A en B.

2) Quelle est la nature du quadrilatère ABDC (le tracer) ?

3) Que sait-on alors pour les segments [AD] et [BC] ?

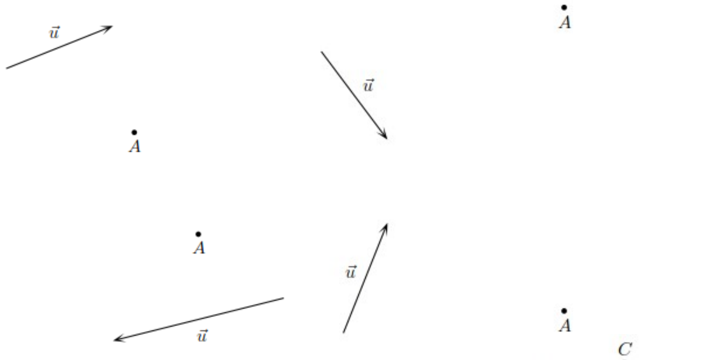


4) Tracer le point F image du point E par la même translation.

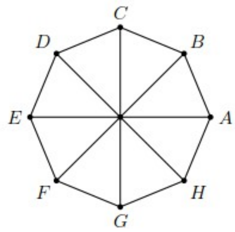
5) Que constate-t-on pour le milieu du segment [AF] et le milieu du segment [BE] ?

Ex 6 : ***Construction à la règle et au compas***

Construire chaque fois, à la règle et au compas, le point B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$



Ex 7 : ***Vecteurs égaux et opposés***



ABCDEFGH est un octogone régulier de centre O.

1) Compléter le tableau suivant par oui ou par non.

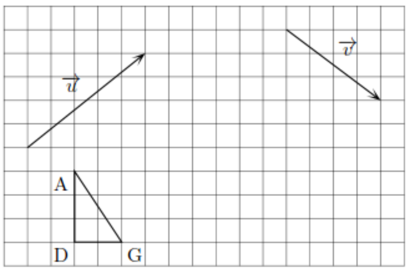
Les vecteurs	$\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{HB}$	$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$
ont la même direction				
ont le même sens				
ont la même longueur				
sont égaux				

2) Indiquer chaque fois si l'affirmation est vraie ou fausse.

- $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont égaux ......
- $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés ......
- $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont opposés ......
- $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont de sens opposés ......

Somme de vecteurs

Ex 8 : ***Découvrir la somme de vecteurs et la relation de Chasles***



1) L'image du triangle ADG par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le triangle BEH. Le tracer

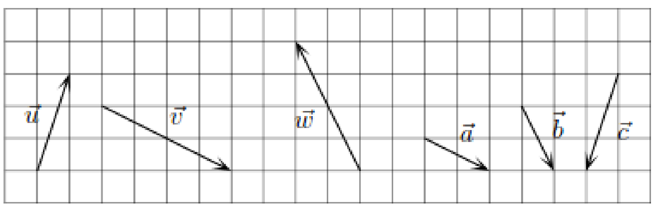
2) L'image du triangle BEH par la translation de vecteur $\vec{v}$ est le triangle CFI. Le tracer.

3) Tracer le vecteur $\vec{w}$ de la translation qui transforme directement ADG en CFI.
Ce vecteur $\vec{w}$ est **la somme des vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On note : $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$

4) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. On constate alors ce qu'on appelle **la relation de Chasles** : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Ex 9 : ***Construire le vecteur somme***

Placer un point sur le quadrillage, et à partir de ce point , construire les sommes : $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{u}+\vec{w}$, $\vec{v}+\vec{a}$, $\vec{w}+\vec{b}$, $\vec{u}+\vec{c}$
(Prendre un nouveau point à chaque fois)



Ex 10 : ***Compléter***

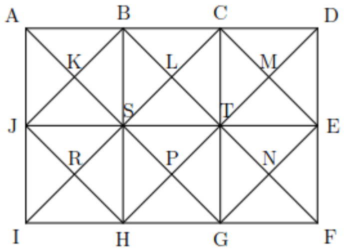
$\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BH}=\ldots$ $\quad\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\ldots$

$\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HT}=\ldots$

$\overrightarrow{HS}+\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{HS}+\overrightarrow{S\ldots}=\overrightarrow{H\ldots}$

$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{C\ldots}=\overrightarrow{D\ldots}$

$\overrightarrow{JS}+\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{JS}+\overrightarrow{S\ldots}=\overrightarrow{J\ldots}$ $\quad\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{G\ldots}=\overrightarrow{F\ldots}$



Ex 11 : ***Découvrir la construction du parallélogramme***

1) Tracer un parallélogramme ABCD.

2) Compléter :

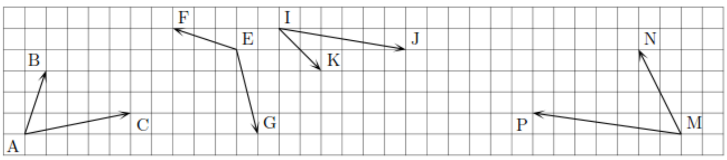
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\ldots}=\overrightarrow{A\ldots}$$

Cette construction est une deuxième méthode de construction de la somme de deux vecteurs, c'est la construction du parallélogramme.

Ex 12 : ***Construction du parallélogramme***

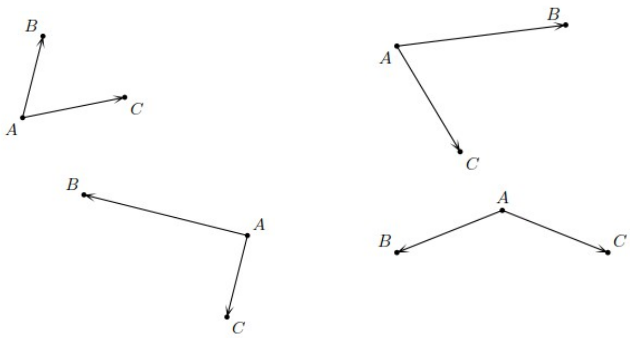
En utilisant la construction du parallélogramme, construire les points D, H, L et R tels que :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MR}$



Ex 13 : ***Construction du parallélogramme***

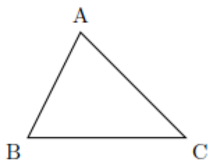
Construire chaque fois le point D tel que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$



Ex 14 : ***Construction à la règle et au compas***

Construire à la règle et au compas les points D et E tels que :

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$



Ex 15 : ***Démonstration***

1) Sur une feuille non quadrillée, tracer un parallélogramme ABCD de centre O.

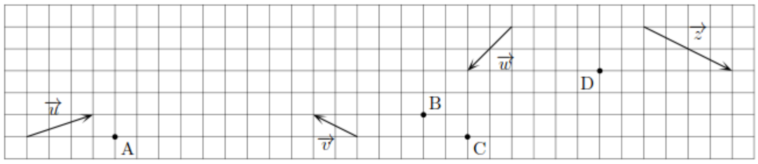
2) Construire les points E et F tels que : $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OF}$

3) Quelle est la nature des quadrilatères OBEC et OCFD ? Justifier.

4) Que peut-on dire du point C par rapport au segment [EF] ? Le démontrer.

Produit d'un vecteur par un nombre réel

Ex 16 : ***Construction***



1) À partir du point A, tracer le vecteur $2\vec{u}=\vec{u}+\vec{u}$

2) Tracer chaque fois le vecteur indiqué à partir du point indiqué.

a) Le vecteur $3\vec{v}$ à partir du point B

b) Le vecteur $-2\vec{w}$ à partir du point C

c) Le vecteur $1,5\vec{z}$ à partir du point D

Ex 17 :

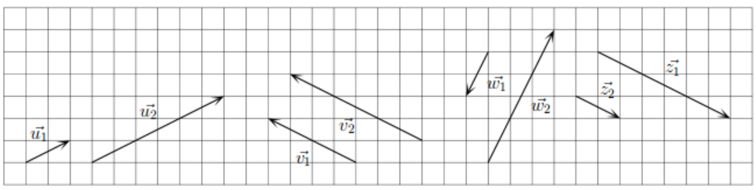
Déterminer chaque fois le nombre indiqué.

1) le nombre a tel que $a\vec{u}_1=\vec{u}_2$

2) le nombre b tel que $b\vec{v}_1=\vec{v}_2$

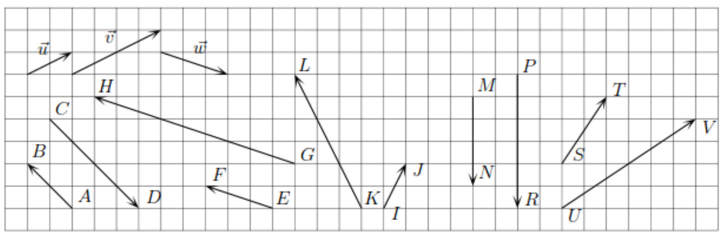
3) le nombre c tel que $c\vec{w}_1=\vec{w}_2$

4) le nombre d tel que $d\vec{z}_1=\vec{z}_2$



Vecteurs colinéaires

Ex 18 : ***Colinéaires ou non ?***



1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ? Si la réponse est oui, donner le nombre k tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ ou le nombre k' tel que $\overrightarrow{CD}=k'\overrightarrow{AB}$

2) Même question pour les vecteurs :

a) $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ b) $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ c) $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PR}$ d) $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{UV}$

Coordonnées de vecteurs

Ex 19 : ***Déterminer les coordonnées***

Indiquer les coordonnées des vecteurs $\vec{u_2}$, $\vec{v_2}$, $\vec{w_2}$, $\vec{z_2}$ de l'exercice 17 et du vecteur $\overrightarrow{MN}$ de l'exercice 18.

Ex 20 : ***Tracer un vecteur connaissant ses coordonnées***

Tracer les vecteurs :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}, \ \overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}, \ \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}, \ \overrightarrow{OP}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$

Coordonnées de vecteurs et coordonnées de points

Ex 21 : ***Lien entre les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et les points A et B.***

1) Dans un repère $(0,I,J)$ placer les points $A(13;29)$ et $B(31;56)$.

2) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3) Quand on a les coordonnées $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, comment calcule-t-on les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$?

Ex 22 : ***Nature d'un quadrilatère***

1) Tracer un repère, placer les points A (−3;2), B (7;0), C (5;−4), D (−5;−2), puis tracer le quadrilatère ABCD.

2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

3) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.

Ex 23 : ***Déterminer les coordonnées d'un point***

1) Tracer un repère, et placer les points A (6;2), B (8;−4), C (−4;3).

2) Placer le point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Tracer ce parallélogramme.

3) Calculer les coordonnées du point D.

Ex 24 : ***Déterminer les coordonnées d'un point***

Dans un repère, les points A, C, E ont pour coordonnées : A (−6;2), C (3 ; 6), E (2 ; −3), et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ont pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$.

1) Tracer un repère, et placer les points A, C, E.

2) Placer les points B, D, F tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{v}$, $\overrightarrow{EF}=\vec{w}$.

3) Calculer les coordonnées des points B, D, F .

Coordonnées de la somme de vecteurs

Ex 25 : ***Découvrir la formule***

1) Dans l'exercice 12, indiquer les coordonnées des vecteurs
a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
b) $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}$
c) $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}$

2) Que constate-t-on pour les coordonnées de deux vecteurs et pour les coordonnées du vecteur somme ?

Ex 26 : ***Déterminer des coordonnées***

1) Tracer un repère (O,I,J) et placer les points A(−2;−1), B(−4;3), C(1;−3), D(6;−2), E(3;−1)

2) On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$. Tracer ces deux vecteurs.

3) Construire le point F tel que $\overrightarrow{EF}=\vec{u}+\vec{v}$

4) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}$.

5) Calculer les coordonnées du point F.

Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre

Ex 27 : ***Découvrir la formule***

1) Indiquer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $2\vec{u}$, $3\vec{v}$, $-2\vec{w}$. de l'exercice 16.

2) Quand on a les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ et un nombre k , comment obtient-on les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$?

Ex 28 : ***Calculs et coordonnées***

Dans un repère (O,I,J), soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :

$\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}-\vec{w}$, $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, $-3\vec{u}-2\vec{v}+5\vec{w}$, $5\vec{v}-3\vec{w}$

Ex 29 : ***Vecteurs colinéaires***

1) Tracer un repère (O,I,J) et placer les points A(1;2), B(5;1), C(6 ;−3), D(−2;−1).

2) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ et calculer leurs coordonnées.

3) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont-ils colinéaires ? Justifier par un calcul.

4) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.

Ex 30 : ***Points alignés***

1) Tracer un repère (O,I,J) et placer les points A(1;2), B(4;4), C(10; 8), D(−4 ;−1).

2) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et calculer leurs coordonnées.

3) Les points A, B, C sont-ils alignés ? Justifier avec des vecteurs colinéaires ou non.

4) Les points A, B, D sont-ils alignés ? Justifier avec des vecteurs colinéaires ou non.

Ex 31 : ***Position relative de deux droites***

Soit dans une repère (O,I,J), les points $A(2;-8)$, $B(-5;6)$, $C(-16;23)$, $D(5;-19)$, $E(-4;4)$, $F(52;12)$, $G(26;-19)$, $H(13;20,5)$ et $I(0;5)$

1) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

2) Les points A,B et E sont-ils alignés ?

3) Montrer que les droites (FG) et (HI) sont parallèles . Sont-elles confondues ?

Sur l'ensemble du chapitre

Ex 32 : ***Manipuler des expressions de vecteurs***

Soit A, B , C , D , E , F et G six points du plan.

1) Simplifier les expressions :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \ldots$ $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} = \ldots$

$\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{BF} = \ldots$

2) En choisissant des points judicieux, compléter :

$\overrightarrow{BE} + \ldots = \overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\ldots F} = \overrightarrow{B\ldots}$

$\overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{\ldots A} = \overrightarrow{BA}$ $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{G\ldots} = \overrightarrow{B\ldots}$

Ex 33 : ***Vecteurs colinéaires***

Soit un repère (O, I, J) . Dire dans chaque cas si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-4\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{5}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\\sqrt{5}+1\end{pmatrix}$

Ex 34 : ***Quelques équations***

Dans un repère, soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2+x\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-4+y\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-4+x\end{pmatrix}$ où x et y sont des réels.

1) Déterminer x et y pour que :

a) $\vec{u}=\vec{v}$

b) $3\vec{u}-5\vec{v}=\vec{0}$

2) Pour quelle valeur de x , $\vec{w}$ est-il colinéaire avec $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$?

3) On considère les points $A(-3;3)$, $B(1;-2+x)$ et $C(5;4)$
Déterminer le réel x pour que les points A, B et C soient alignés.

Ex 35 : ***Orthocentre d'un triangle***

Soit un triangle ABC et A', B', C', les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].
Soit O, le centre du cercle circonscrit à ce triangle.
Soit H, le point déterminé par $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OA'}$

2) En déduire que la droite (AH) est la hauteur du triangle ABC issue du point A.

3) Que peut-on dire des droites (BH) et (CH) ?

4) Donner une caractérisation vectorielle de l'orthocentre d'un triangle.

Ex 36 : ***GeoGebra - Droite d'Euler d'un triangle***
(consulter trans_vecteurs_geo36.html)

Soit un triangle ABC, H, son orthocentre, G son centre de gravité et O le centre du cercle circonscrit.
Le point H est caractérisé par l'égalité $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ et le point G par l'égalité $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (montrer dans l'exercice 37).

1) Avec GeoGebra, construire un triangle ABC et placer les points H, G et O.

2) Que peut-on conjecturer ?

3) Soit M, un point quelconque du plan . Montrer que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

4) Montrer que $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$

5) En déduire que les points O, H et G sont alignés.

6) dans quel cas, a-t-on O=G ? Montrer qu'alors les trois points O, G et H sont confondus.

5) Conclure

Ex 37 :

1) Soit un parallélogramme ABCD de centre I.
Montrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AI}$

2) Montrer que le centre de gravité G d'un triangle ABC vérifie $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ex 38 : ***Algorithme*** (consulter trans_vecteurs_algo38.html)

Dans un repère (O, I, J) , on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$.

1) On suppose que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) On suppose que le vecteurs $\vec{u}$ est non nul . Montrer qu'alors $ab'=ba'$

b) On suppose que le vecteurs $\vec{u}$ est nul . Montrer que l'égalité $ab'=ba'$ est encore vérifiée.

2) Réciproquement, on suppose que $ab'=ba'$.

a) Montrer que si $a\neq 0$, alors $\vec{v}=\frac{a'}{a}\vec{u}$. Que peut-on en déduire ?

b) On suppose que $a=0$. Montrer qu'on arrive à la même conclusion.

c) Écrire la condition nécessaire et suffisant de colinéarité de deux vecteurs que l'on a obtenue.

3) a) Écrire un algorithme déterminant la colinéarité ou non de deux vecteurs . Les données seront les coordonnées de chacun des deux vecteurs.

b) Soit deux droites, toutes deux déterminées par deux points distincts. À partir de l'algorithme précédent, écrire un algorithme déterminant si ces deux droites sont sécantes.
Les données seront les coordonnées de quatre points.

4) Tester ces algorithmes (Calculatrice ou algobox)