DROITES ET SYSTÈMES

1) ÉQUATION D'UNE DROITE

A) ÉQUATION RÉDUITE D'UNE DROITE DU PLAN

Remarque :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-x'y=0$.

Ce nombre se note det($\vec{u}$, $\vec{v}$)= $\begin{vmatrix}x & y\\x' & y'\end{vmatrix}$

Ce résultat est immédiat si l'un des vecteurs est nul et traduit la proportionnalité des coordonnées si les deux vecteurs sont non nuls.

Propriété et définition :

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $\boldsymbol{x=k}$ où k est un réel.
- Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $\boldsymbol{y=ax+b}$ où a et b sont des réels.

Dans les deux cas, l'équation est appelée **équation réduite** de la droite.

Preuve :

Soit d une droite du plan, $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points distincts de la droite d .

Soit M $(x;y)$ un point du plan.

On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

M appartient à la droite d si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, ce qui revient à dire que :

det($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}$)=0 $\Leftrightarrow$ $(x-x_A)(y_B-y_A)-(y-y_A)(x_B-x_A)=0$

A et B sont distincts, on a donc deux cas :

cas 1 : $x_A=x_B$ et $y_A\neq y_B$

On obtient : $(x-x_A)(y_B-y_A)=0 \Leftrightarrow x=x_A$

En posant $x_A=k$, on obtient :

M∈(AB) $\Leftrightarrow$ $x=k$

cas 2 : $x_A \neq x_B$

On obtient : $y-y_A=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\times(x-x_A) \Leftrightarrow y=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}x-\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}x_A+y_A$

En posant $a=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ et $b=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}x_A+y_A$, on obtient :

M∈(AB) $\Leftrightarrow$ $y=ax+b$

Propriété :

L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que :

- $x=k$ où k est un réel, est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
- $y=ax+b$ où a et b sont des réels, est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Preuve:

- Si $x=k$, tous les points ont la même abscisse et le résultat est immédiat
- Soit $A(0;b)$ et $B(1;a+b)$, deux points distincts de l'ensemble cherché, et $M(x;y)$ un point du plan tel $y=ax+b$.

  On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\ax\end{pmatrix}$

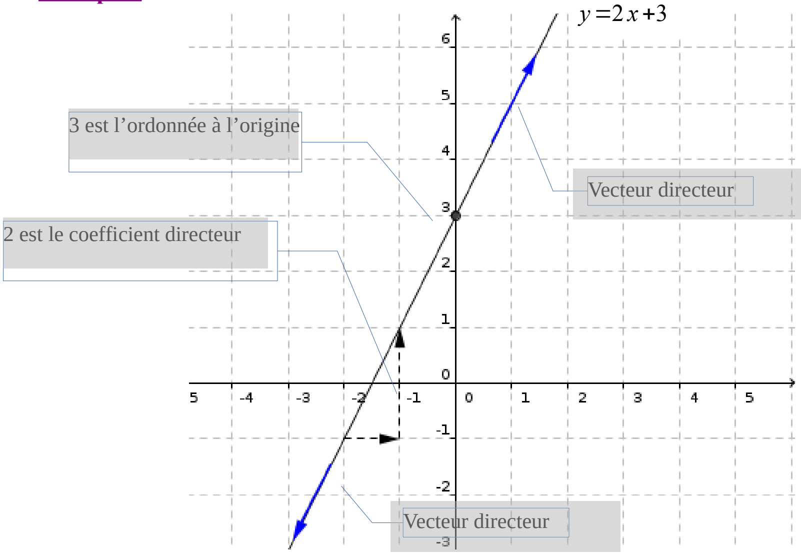
  Ainsi $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$ et on en déduit que le point M appartient à la droite (AB).

Remarque :

Toute droite admet une infinité d'équations, appelées équations cartésiennes de la droite.

Les équations suivantes sont des équations de la même droite : $y=2x+3 \Leftrightarrow -2x+y-3=0 \Leftrightarrow 2x-y+3=0 \Leftrightarrow 4x-2y+6=0 \Leftrightarrow \ldots$

Exemple :



Le coefficient directeur est 2.

Il indique l'accroissement de y pour un accroissement de x égal à 1.

L'ordonnée à l'origine est 3.

Elle indique l'ordonnée du point d'intersection de la droite d avec l'axe des ordonnées.

Un vecteur directeur est un vecteur constitué de deux points distincts de la droite . Il indique la direction de la droite.

Les vecteurs directeurs d'une droite sont tous colinéaires.

Remarque :
Le coefficient directeur de la droite d, d'équation $y=ax+b$, indique :
- la direction de d :
  si $a=0$, d est parallèle à l'axe des abscisses
  si $a>0$, d « monte » de la gauche vers la droite
  si $a<0$, d « descend » de la gauche vers la droite
- l'inclinaison de d par rapport à l'axe des abscisses

B) DROITES PARALLÈLES

Propriété :

Si dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, une droite d a pour équation $y=ax+b$, alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .

Preuve :
$A(0;b)$ et $B(1;a+b)$ sont deux points distincts de d .
Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ est donc un vecteur directeur de d .

Propriété :

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les droites $d: y=ax+b$ et $d': y=a'x+b'$.
Les droites d et d' sont parallèles si, et seulement si, elles ont le même coefficient directeur.

$d \,//\, d' \Leftrightarrow a=a'$

Preuve :
$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\a'\end{pmatrix}$ sont respectivement des vecteurs directeurs de d et de d' .
Dire que d et d' sont parallèles, signifie qu'elles ont la même direction, c'est à dire que $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires, ce qui revient à dire que :
det($\vec{u}$, $\vec{u'}$)=0 $\Leftrightarrow$ 1 $\times$ a -1 $\times$ a' =0 $\Leftrightarrow$ $a=a'$

2) SYSTÈMES LINÉAIRES

A) ÉQUATION LINÉAIRE A DEUX INCONNUES

Définition :

Toute équation de la forme $ax+by=c$, où a , b et c sont des réels donnés, est **une équation linéaire à deux inconnues** x et y .

Tout couple $(x_0;y_0)$ vérifiant $ax_0+by_0=c$ est une **solution** de cette équation.

Résoudre une telle équation, c'est déterminer tous les couples $(x;y)$ solutions.

Interprétation géométrique :

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, l'ensemble des points $M(x,y)$ dont les coordonnées vérifient la relation $ax+by=c$ où $(a;b) \neq (0;0)$ est une droite :

- Si $b=0$, la droite a pour équation réduite $x=\frac{c}{a}$
- Si $b\neq 0$, la droite a pour équation réduite $y=-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$

Les solutions de l'équation sont les couples $(x;y)$ coordonnées des points appartenant à la droite.

B) SYSTÈME LINÉAIRE DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES

Définition :

On appelle **système linéaire** de deux équations à deux inconnues, x et y , tout système qui peut se mettre sous la forme :

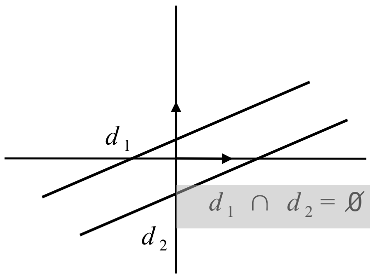
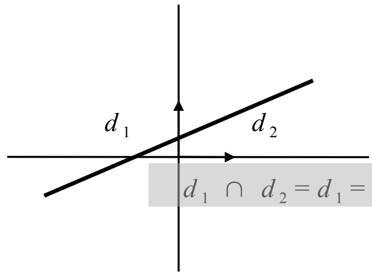
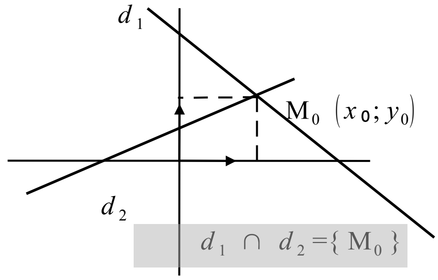
(S) $\begin{cases} ax+by=c & (L_1) \\ a'x+b'y=c' & (L_2)\end{cases}$ où a , b , c , a' , b' et c' sont des réels donnés.

Résoudre un tel système, c'est rechercher le (ou les) couple(s) $(x;y)$ vérifiant à la fois les deux équations.

C) RÉSOLUTION

Interprétation géométrique :

Soit le système (S) dans lequel nous supposons $(a;b)\neq(0;0)$ et $(a';b')\neq(0;0)$.
Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, les équations (L_1) et (L_2) sont des équations cartésiennes de deux droites d_1 et d_2.
Un couple $(x;y)$ de nombres est solution de (S) si, et seulement si, le point $M(x;y)$ appartient à d_1 et à d_2.
Résoudre (S) revient donc à étudier la position relative des droites d_1 et d_2.

d_1 et d_2 sont strictement parallèles	d_1 et d_2 sont confondues	d_1 et d_2 sont sécantes
 $d_1 \cap d_2 = \emptyset$	 $d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2$	 $d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$
$ab'-a'b=0$		$ab'-a'b\neq0$
(S) n'a aucune solution	(S) a une infinité de solutions : tous les couples coordonnées des points de d_1 (ou de d_2)	(S) a une unique solution : $(x_0;y_0)$ coordonnées de M_0

Propriété :

> Le système (S) $\begin{cases} ax+by=c & (L_1) \\ a'x+b'y=c' & (L_2)\end{cases}$ tel que $ab'-a'b\neq0$ admet une **unique** solution.

- Si d_1 et d_2 ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées, elles ont respectivement pour vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\-\frac{a}{b}\end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\-\frac{a'}{b'}\end{pmatrix}$. On peut aussi choisir $\vec{v_1}$ $\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}$ $\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$
det($\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$)= $ab'-a'b$ ….
- Si d_1 et/ou d_2 est parallèle à l'axe des ordonnées, le résultat est immédiat.

Méthodes numériques de résolution :

Résoudre le système (S) : $\begin{cases} 3x-2y=5 & (L_1) \\ x+3y=9 & (L_2)\end{cases}$

$3\times3-(-2)\times1=9+2=11$. Le système (S) admet donc une unique solution.

RÉSOLUTION PAR SUBSTITUTION

MÉTHODE	RÉSOLUTION	COMMENTAIRES
• Exprimer x en fonction de y (ou y en fonction de x) à l'aide de la première ou de la deuxième équation	• (L_2) permet d'écrire : $x=9-3y$	Il ne faut pas partir tête baissée … Il faut essayer de choisir l'expression qui facilite le plus les calculs.
• Remplacer ensuite x par cette expression dans la deuxième équation, ce qui permet de trouver y .	• En remplaçant x par $9-3y$ dans (L_1) , on obtient : $3(9-3y)-2y=5$ $\Leftrightarrow$ $27-9y-2y=5$ $\Leftrightarrow$ $22=11y$ $\Leftrightarrow$ $y=2$	On obtient une équation à une inconnue (y ici) On a trouvé y
• Calculer x en utilisant la valeur de y	• En remplaçant y par 2 dans $x=9-3y$, on obtient : $x=9-3\times2=9-6=3$	On a trouvé x
• Vérifier que le couple $(x;y)$ trouvé est bien solution du système	• On vérifie que le couple $(3;2)$ est solution du système (S) : $3\times3-2\times2=9-4=5$ $3+3\times2=3+6=9$	Attention à l'ordre !
• Conclure	• Le couple $(3;2)$ est donc l'unique solution du système (S)	

Remarque : une résolution par équivalence présentée comme ci-dessous, permet d'éviter de faire une vérification.

$$\begin{cases}3x-2y=5\\x+3y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=5\\x=9-3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(9-3y)-2y=5\\x=9-3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}27-9y-2y=5\\x=9-3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}22=11y\\x=9-3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\x=3\end{cases}$$

RÉSOLUTION PAR COMBINAISON (OU ÉLIMINATION)

MÉTHODE	RÉSOLUTION	COMMENTAIRES
• Multiplier les deux équations par des nombres bien choisis afin d'obtenir le même coefficient devant x (ou y si c'est plus simple)	• On multiplie les deux membres de l'équation (L_2) par 3 . On obtient : $\begin{cases}3x-2y=5 (L1)\\3(x+3y)=3\times9 (L2\leftarrow 3L2)\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=5 (L1)\\3x+9y=27 (L2)\end{cases}$	Cette écriture signifie que l'on a multiplié les 2 membres de l'équation (L_2) par 3 et que l'on a remplacé l'équation (L_2) par $(3L_2)$
• Soustraire (ou additionner) membre à membre pour éliminer x (ou y)	• On soustrait membre à membre (L_2) à (L_1) ; On obtient : $3x-2y-(3x+9y)=5-27$ $\Leftrightarrow -11y=-22$ $\Leftrightarrow y=2$	On a trouvé y
• Remplacer y par sa valeur dans une des équations.	• On remplace y par 2 dans (L_1) . On obtient : $3x-2\times2=5$ $\Leftrightarrow 3x=9$ $\Leftrightarrow x=3$	On a trouvé x
• Vérifier que le couple $(x;y)$ trouvé est bien solution du système	• … déjà vu !	
• Conclure	• … ça aussi !	

Remarque : une résolution par équivalence présentée comme ci-dessous, permet d'éviter de faire une vérification.

$$\begin{cases}3x-2y=5\\x+3y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=5 (L1)\\3(x+3y)=39 (L2\leftarrow 3L2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=5 (L1)\\3x+9y=27 (L2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=5 (L1)\\-11y=-22 (L2\leftarrow L1-L2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=2\times\left(\frac{27}{11}\right)+5 (L1)\\y=\frac{22}{11} (L2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$$