

DROITES ET SYSTÈMES

1) ÉQUATION D'UNE DROITE

A) ÉQUATION RÉDUITE D'UNE DROITE DU PLAN

Remarque :

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Ce nombre se note $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$

Ce résultat est immédiat si l'un des vecteurs est nul et traduit la proportionnalité des coordonnées si les deux vecteurs sont non nuls.

Propriété et définition :

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x=k$ où k est un réel.
- Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y=ax+b$ où a et b sont des réels.

Dans les deux cas, l'équation est appelée **équation réduite** de la droite.

Preuve :

Soit d une droite du plan, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts de la droite d .

Soit $M(x; y)$ un point du plan.

On a $\vec{AM} = \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$

M appartient à la droite d si, et seulement si, \vec{AM} et \vec{AB} sont colinéaires, ce qui revient à dire que :

$$\det(\vec{AB}, \vec{AM}) = 0 \Leftrightarrow (x-x_A)(y_B-y_A) - (y-y_A)(x_B-x_A) = 0$$

A et B sont distincts, on a donc deux cas :

cas 1 : $x_A = x_B$ et $y_A \neq y_B$

On obtient : $(x-x_A)(y_B-y_A) = 0 \Leftrightarrow x = x_A$

En posant $x_A = k$, on obtient :

$$M \in (AB) \Leftrightarrow x = k$$

Propriété :

L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

- $x=k$ où k est un réel, est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
- $y=ax+b$ où a et b sont des réels, est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Preuve :

- Si $x=k$, tous les points ont la même abscisse et le résultat est immédiat
- Soit $A(0; b)$ et $B(1; a+b)$, deux points distincts de l'ensemble cherché, et $M(x; y)$ un point du plan tel $y=ax+b$.

On a : $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{AM} = \begin{pmatrix} x \\ ax \end{pmatrix}$

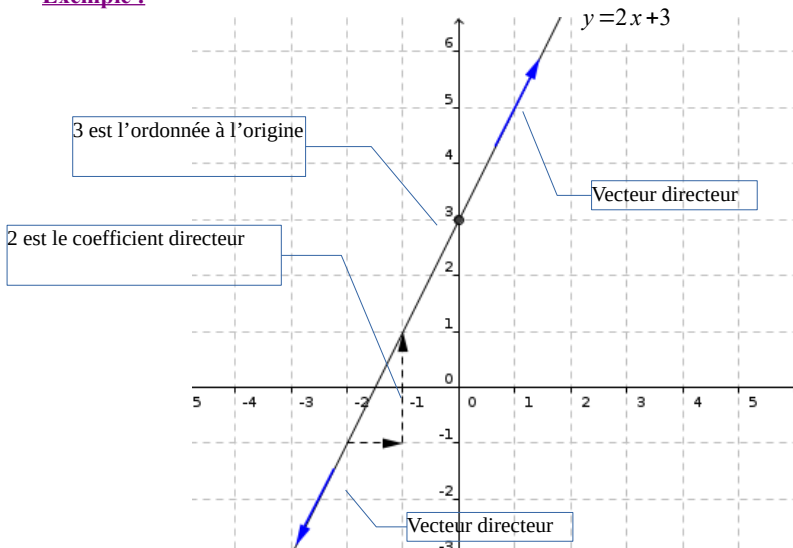
Ainsi $\vec{AM} = x \vec{AB}$ et on en déduit que le point M appartient à la droite (AB) .

Remarque :

Toute droite admet une infinité d'équations, appelées équations cartésiennes de la droite.

Les équations suivantes sont des équations de la même droite : $y=2x+3 \Leftrightarrow -2x+y-3=0 \Leftrightarrow 2x-y+3=0 \Leftrightarrow 4x-2y+6=0 \Leftrightarrow \dots$

Exemple :



Le coefficient directeur est 2.

Il indique l'accroissement de y pour un accroissement de x égal à 1.

L'ordonnée à l'origine est 3.

Elle indique l'ordonnée du point d'intersection de la droite d avec l'axe des ordonnées.

Un vecteur directeur est un vecteur constitué de deux points distincts de la droite. Il indique la direction de la droite.

Les vecteurs directeurs d'une droite sont tous colinéaires.

Remarque :

Le coefficient directeur de la droite d , d'équation $y = ax + b$, indique :

- la direction de d :

si $a = 0$, d est parallèle à l'axe des abscisses

si $a > 0$, d « monte » de la gauche vers la droite

si $a < 0$, d « descend » de la gauche vers la droite

- l'inclinaison de d par rapport à l'axe des abscisses

B) DROITES PARALLÈLES

Propriété :

Si dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, une droite d a pour équation $y = ax + b$, alors le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .

Preuve :

$A(0; b)$ et $B(1; a + b)$ sont deux points distincts de d .

Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ est donc un vecteur directeur de d .

Propriété :

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les droites $d: y = ax + b$ et $d': y = a'x + b'$.
Les droites d et d' sont parallèles si, et seulement si, elles ont le même coefficient directeur.

$$d \parallel d' \Leftrightarrow a = a'$$

Preuve :

$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ a' \end{pmatrix}$ sont respectivement des vecteurs directeurs de d et de d' .

Dire que d et d' sont parallèles, signifie qu'elles ont la même direction, c'est à dire que \vec{u} et \vec{u}' sont colinéaires, ce qui revient à dire que :
 $\det(\vec{u}, \vec{u}') = 0 \Leftrightarrow 1 \times a - 1 \times a' = 0 \Leftrightarrow a = a'$

2) SYSTÈMES LINÉAIRES

A) ÉQUATION LINÉAIRE A DEUX INCONNUES

Définition :

Toute équation de la forme $ax + by = c$, où a , b et c sont des réels donnés, est une **équation linéaire à deux inconnues** x et y .

Tout couple $(x_0; y_0)$ vérifiant $ax_0 + by_0 = c$ est une **solution** de cette équation.

Résoudre une telle équation, c'est déterminer tous les couples $(x; y)$ solutions.

Interprétation géométrique :

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble des points $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient la relation $ax + by = c$ où $(a; b) \neq (0; 0)$ est une droite :

- Si $b = 0$, la droite a pour équation réduite $x = \frac{c}{a}$
- Si $b \neq 0$, la droite a pour équation réduite $y = -\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$

Les solutions de l'équation sont les couples $(x; y)$ coordonnées des points appartenant à la droite.

B) SYSTÈME LINÉAIRE DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES

Définition :

On appelle **système linéaire** de deux équations à deux inconnues, x et y , tout système qui peut se mettre sous la forme :

$$(S) \begin{cases} ax + by = c & (L_1) \\ a'x + b'y = c' & (L_2) \end{cases} \text{ où } a, b, c, a', b' \text{ et } c' \text{ sont des réels donnés.}$$

Résoudre un tel système, c'est rechercher le (ou les) couple(s) $(x; y)$ vérifiant à la fois les deux équations.

C) RÉSOLUTION

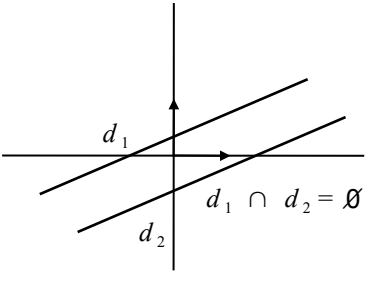
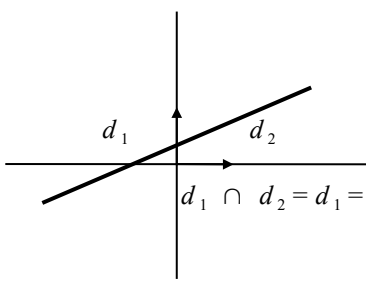
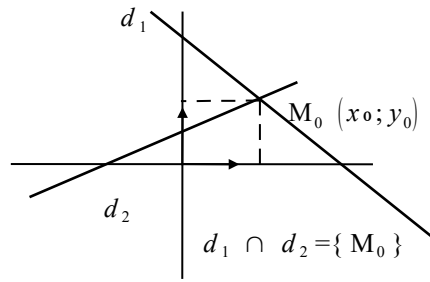
Interprétation géométrique :

Soit le système (S) dans lequel nous supposons $(a; b) \neq (0; 0)$ et $(a'; b') \neq (0; 0)$.

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les équations (L_1) et (L_2) sont des équations cartésiennes de deux droites d_1 et d_2 .

Un couple $(x; y)$ de nombres est solution de (S) si, et seulement si, le point $M(x; y)$ appartient à d_1 et à d_2 .

Résoudre (S) revient donc à étudier la position relative des droites d_1 et d_2 .

d_1 et d_2 sont strictement parallèles	d_1 et d_2 sont confondues	d_1 et d_2 sont sécantes
 <p style="text-align: center;">$d_1 \cap d_2 = \emptyset$</p>	 <p style="text-align: center;">$d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2$</p>	 <p style="text-align: center;">$d_1 \cap d_2 = \{M_0\}$</p>
$ab' - a'b = 0$		$ab' - a'b \neq 0$
(S) n'a aucune solution	(S) a une infinité de solutions : tous les couples coordonnées des points de d_1 (ou de d_2)	(S) a une unique solution : $(x_0; y_0)$ coordonnées de M_0

Propriété :

Le système (S) $\begin{cases} ax+by=c & (L_1) \\ a'x+b'y=c' & (L_2) \end{cases}$ tel que $ab' - a'b \neq 0$ admet une **unique** solution.

- Si d_1 et d_2 ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées, elles ont respectivement pour vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -a' \end{pmatrix}$. On peut aussi choisir $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$
 $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = ab' - a'b \dots$
 - Si d_1 et/ou d_2 est parallèle à l'axe des ordonnées, le résultat est immédiat.

Méthodes numériques de résolution :

Résoudre le système (S) : $\begin{cases} 3x-2y=5 & (L_1) \\ x+3y=9 & (L_2) \end{cases}$

$3 \times 3 - (-2) \times 1 = 9 + 2 = 11$. Le système (S) admet donc une unique solution.

RÉSOLUTION PAR SUBSTITUTION

MÉTHODE	RÉSOLUTION	COMMENTAIRES
<ul style="list-style-type: none"> Exprimer x en fonction de y (ou y en fonction de x) à l'aide de la première ou de la deuxième équation Remplacer ensuite x par cette expression dans la deuxième équation, ce qui permet de trouver y. Calculer x en utilisant la valeur de y Vérifier que le couple $(x; y)$ trouvé est bien solution du système Conclure 	<ul style="list-style-type: none"> (L_2) permet d'écrire : $x = 9 - 3y$ En remplaçant x par $9 - 3y$ dans (L_1), on obtient : $3(9 - 3y) - 2y = 5$ $\Leftrightarrow 27 - 9y - 2y = 5$ $\Leftrightarrow 22 = 11y$ $\Leftrightarrow y = 2$ En remplaçant y par 2 dans $x = 9 - 3y$, on obtient : $x = 9 - 3 \times 2 = 9 - 6 = 3$ On vérifie que le couple $(3; 2)$ est solution du système (S) : $3 \times 3 - 2 \times 2 = 9 - 4 = 5$ $3 + 3 \times 2 = 3 + 6 = 9$ Le couple $(3; 2)$ est donc l'unique solution du système (S) 	<p>Il ne faut pas partir tête baissée ... Il faut essayer de choisir l'expression qui facilite le plus les calculs.</p> <p>On obtient une équation à une inconnue (y ici)</p> <p>On a trouvé y</p> <p>On a trouvé x</p> <p>Attention à l'ordre !</p>

Remarque : une résolution par équivalence présentée comme ci-dessous, permet d'éviter de faire une vérification.

$$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5 \\ x=9-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(9-3y)-2y=5 \\ x=9-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27-9y-2y=5 \\ x=9-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22=11y \\ x=9-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=3 \end{cases}$$

RÉSOLUTION PAR COMBINAISON (OU ÉLIMINATION)

MÉTHODE	RÉSOLUTION	COMMENTAIRES
<ul style="list-style-type: none"> Multiplier les deux équations par des nombres bien choisis afin d'obtenir le même coefficient devant x (ou y si c'est plus simple) 	<ul style="list-style-type: none"> On multiplie les deux membres de l'équation (L_2) par 3. On obtient : $\begin{cases} 3x-2y=5(L1) \\ 3(x+3y)=3 \times 9(L2 \leftarrow 3L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5(L1) \\ 3x+9y=27(L2) \end{cases}$ 	<p>Cette écriture signifie que l'on a multiplié les 2 membres de l'équation (L_2) par 3 et que l'on a remplacé l'équation (L_2) par $(3L_2)$</p>
<ul style="list-style-type: none"> Soustraire (ou additionner) membre à membre pour éliminer x (ou y) 	<ul style="list-style-type: none"> On soustrait membre à membre (L_2) à (L_1) ; On obtient : $\begin{aligned} 3x-2y-(3x+9y) &= 5-27 \\ \Leftrightarrow -11y &= -22 \\ \Leftrightarrow y &= 2 \end{aligned}$ 	<p>On a trouvé y</p>
<ul style="list-style-type: none"> Remplacer y par sa valeur dans une des équations. 	<ul style="list-style-type: none"> On remplace y par 2 dans (L_1). On obtient : $\begin{aligned} 3x-2 \times 2 &= 5 \\ \Leftrightarrow 3x &= 9 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned}$ 	<p>On a trouvé x</p>
<ul style="list-style-type: none"> Vérifier que le couple $(x; y)$ trouvé est bien solution du système Conclure 	<ul style="list-style-type: none"> ... déjà vu ! ... ça aussi ! 	

Remarque : une résolution par équivalence présentée comme ci-dessous, permet d'éviter de faire une vérification.

$$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5(L1) \\ 3(x+3y)=27(L2 \leftarrow 3L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5(L1) \\ 3x+9y=27(L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5(L1) \\ -11y=-22(L2 \leftarrow L1-L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2 \times \left(\frac{27}{11}\right) + 5(L1) \\ y=\frac{22}{11}(L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$