

# DROITES ET SYSTÈMES

## 1) ÉQUATION D'UNE DROITE

### A) ÉQUATION RÉDUITE D'UNE DROITE DU PLAN

#### Remarque :

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs du plan.

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $xy' - x'y = 0$ .

Ce nombre se note  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$

Ce résultat est immédiat si l'un des vecteurs est nul et traduit la proportionnalité des coordonnées si les deux vecteurs sont non nuls.

#### Propriété et définition :

Le plan est muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme  $x=k$  où  $k$  est un réel.
- Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme  $y=ax+b$  où  $a$  et  $b$  sont des réels.

Dans les deux cas, l'équation est appelée **équation réduite** de la droite.

#### Preuve :

Soit  $d$  une droite du plan,  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points distincts de la droite  $d$ .

Soit  $M(x; y)$  un point du plan.

On a  $\overline{AM} \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$  et  $\overline{AB} \begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$

$M$  appartient à la droite  $d$  si, et seulement si,  $\overline{AM}$  et  $\overline{AB}$  sont colinéaires, ce qui revient à dire que :

$$\det(\overline{AB}, \overline{AM})=0 \Leftrightarrow (x-x_A)(y_B-y_A) - (y-y_A)(x_B-x_A)=0$$

A et B sont distincts, on a donc deux cas :

**cas 1 :**  $x_A=x_B$  et  $y_A \neq y_B$

On obtient :  $(x-x_A)(y_B-y_A)=0 \Leftrightarrow x=x_A$

En posant  $x_A=k$ , on obtient :

$$M \in (AB) \Leftrightarrow x=k$$

**cas 2 :**  $x_A \neq x_B$

On obtient :  $y-y_A = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} (x-x_A) \Leftrightarrow y = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} x - \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} x_A + y_A$

En posant  $a = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$  et  $b = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} x_A + y_A$ , on obtient :

$$M \in (AB) \Leftrightarrow y=ax+b$$

#### Propriété :

L'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que :

- $x=k$  où  $k$  est un réel, est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
- $y=ax+b$  où  $a$  et  $b$  sont des réels, est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

#### Preuve :

- Si  $x=k$ , tous les points ont la même abscisse et le résultat est immédiat
- Soit  $A(0; b)$  et  $B(1; a+b)$ , deux points distincts de l'ensemble cherché, et  $M(x; y)$  un point du plan tel  $y=ax+b$ .

On a :  $\overline{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$  et  $\overline{AM} \begin{pmatrix} x \\ ax \end{pmatrix}$

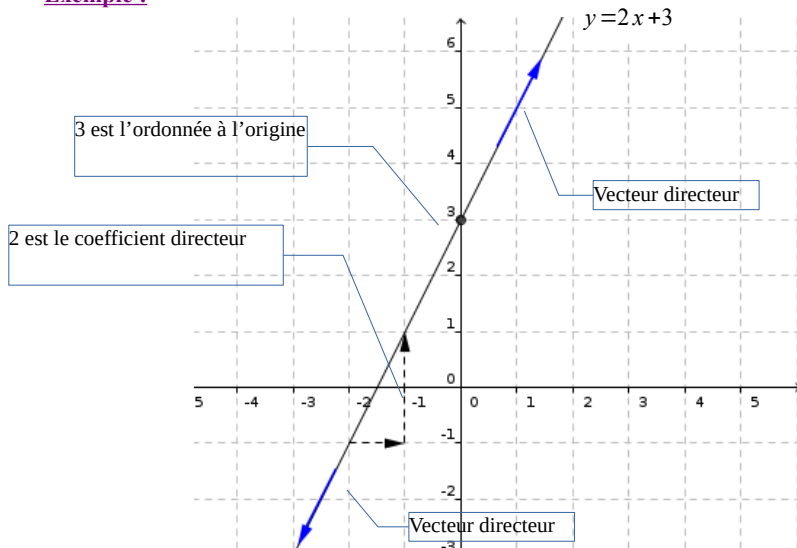
Ainsi  $\overline{AM} = x \overline{AB}$  et on en déduit que le point  $M$  appartient à la droite  $(AB)$ .

#### Remarque :

Toute droite admet une infinité d'équations, appelées équations cartésiennes de la droite.

Les équations suivantes sont des équations de la même droite :  $y=2x+3 \Leftrightarrow -2x+y-3=0 \Leftrightarrow 2x-y+3=0 \Leftrightarrow 4x-2y+6=0 \Leftrightarrow \dots$

#### Exemple :



**Le coefficient directeur** est 2.

Il indique l'accroissement de  $y$  pour un accroissement de  $x$  égal à 1.

**L'ordonnée à l'origine** est 3.

Elle indique l'ordonnée du point d'intersection de la droite  $d$  avec l'axe des ordonnées.

**Un vecteur directeur** est un vecteur constitué de deux points distincts de la droite. Il indique la direction de la droite.

Les vecteurs directeurs d'une droite sont tous colinéaires.

### Remarque :

Le coefficient directeur de la droite  $d$ , d'équation  $y = ax + b$ , indique :

- la direction de  $d$  :

si  $a = 0$ ,  $d$  est parallèle à l'axe des abscisses

si  $a > 0$ ,  $d$  « monte » de la gauche vers la droite

si  $a < 0$ ,  $d$  « descend » de la gauche vers la droite

- l'inclinaison de  $d$  par rapport à l'axe des abscisses

## B) DROITES PARALLÈLES

### Propriété :

Si dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , une droite  $d$  a pour équation  $y = ax + b$ , alors le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $d$ .

### Preuve :

$A(0; b)$  et  $B(1; a + b)$  sont deux points distincts de  $d$ .

Le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$  est donc un vecteur directeur de  $d$ .

### Propriété :

Dans le plan muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les droites  $d: y = ax + b$  et  $d': y = a'x + b'$ .  
Les droites  $d$  et  $d'$  sont parallèles si, et seulement si, elles ont le même coefficient directeur.

$$d \parallel d' \Leftrightarrow a = a'$$

### Preuve :

$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ a' \end{pmatrix}$  sont respectivement des vecteurs directeurs de  $d$  et de  $d'$ .

Dire que  $d$  et  $d'$  sont parallèles, signifie qu'elles ont la même direction, c'est à dire que  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont colinéaires, ce qui revient à dire que :  
 $\det(\vec{u}, \vec{u}') = 0 \Leftrightarrow 1 \times a - 1 \times a' = 0 \Leftrightarrow a = a'$

## 2) SYSTÈMES LINÉAIRES

### A) ÉQUATION LINÉAIRE A DEUX INCONNUES

#### Définition :

Toute équation de la forme  $ax + by = c$ , où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels donnés, est une **équation linéaire à deux inconnues**  $x$  et  $y$ .

Tout couple  $(x_0; y_0)$  vérifiant  $ax_0 + by_0 = c$  est une **solution** de cette équation.

Résoudre une telle équation, c'est déterminer tous les couples  $(x; y)$  solutions.

#### Interprétation géométrique :

Dans le plan muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , l'ensemble des points  $M(x, y)$  dont les coordonnées vérifient la relation  $ax + by = c$  où  $(a; b) \neq (0; 0)$  est une droite :

- Si  $b = 0$ , la droite a pour équation réduite  $x = \frac{c}{a}$
- Si  $b \neq 0$ , la droite a pour équation réduite  $y = -\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$

Les solutions de l'équation sont les couples  $(x; y)$  coordonnées des points appartenant à la droite.

### B) SYSTÈME LINÉAIRE DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES

#### Définition :

On appelle **système linéaire** de deux équations à deux inconnues,  $x$  et  $y$ , tout système qui peut se mettre sous la forme :

$$(S) \begin{cases} ax + by = c & (L_1) \\ a'x + b'y = c' & (L_2) \end{cases} \text{ où } a, b, c, a', b' \text{ et } c' \text{ sont des réels donnés.}$$

Résoudre un tel système, c'est rechercher le (ou les) couple(s)  $(x; y)$  vérifiant à la fois les deux équations.

## C.) RÉSOLUTION

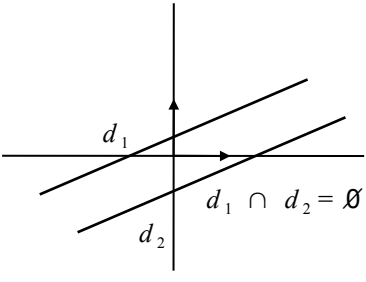
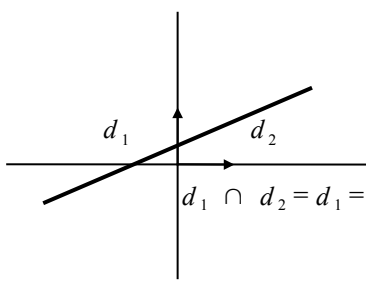
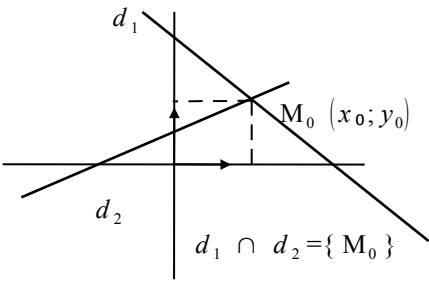
### Interprétation géométrique :

Soit le système (S) dans lequel nous supposons  $(a; b) \neq (0; 0)$  et  $(a'; b') \neq (0; 0)$ .

Dans le plan muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , les équations  $(L_1)$  et  $(L_2)$  sont des équations cartésiennes de deux droites  $d_1$  et  $d_2$ .

Un couple  $(x; y)$  de nombres est solution de (S) si, et seulement si, le point  $M(x; y)$  appartient à  $d_1$  et à  $d_2$ .

Résoudre (S) revient donc à étudier la position relative des droites  $d_1$  et  $d_2$ .

$d_1$ et $d_2$ sont strictement parallèles	$d_1$ et $d_2$ sont confondues	$d_1$ et $d_2$ sont sécantes
 <p style="text-align: center;"><math>d_1 \cap d_2 = \emptyset</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>d_1 \cap d_2 = \{M_0\}</math></p>
$ab' - a'b = 0$		$ab' - a'b \neq 0$
(S) n'a aucune solution	(S) a une infinité de solutions : tous les couples coordonnées des points de $d_1$ ( ou de $d_2$ )	(S) a une unique solution : $(x_0; y_0)$ coordonnées de $M_0$

### Propriété :

Le système (S)  $\begin{cases} ax+by=c & (L_1) \\ a'x+b'y=c' & (L_2) \end{cases}$  tel que  $ab' - a'b \neq 0$  admet une **unique** solution.

- Si  $d_1$  et  $d_2$  ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées, elles ont respectivement pour vecteur directeur  $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -a' \end{pmatrix}$ . On peut aussi choisir  $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$   
 $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = ab' - a'b \dots$   
 - Si  $d_1$  et/ou  $d_2$  est parallèle à l'axe des ordonnées, le résultat est immédiat.

### Méthodes numériques de résolution :

Résoudre le système (S) :  $\begin{cases} 3x-2y=5 & (L_1) \\ x+3y=9 & (L_2) \end{cases}$

$3 \times 3 - (-2) \times 1 = 9 + 2 = 11$ . Le système (S) admet donc une unique solution.

### RÉSOLUTION PAR SUBSTITUTION

MÉTHODE	RÉSOLUTION	COMMENTAIRES
<ul style="list-style-type: none"> <li>Exprimer <math>x</math> en fonction de <math>y</math> ( ou <math>y</math> en fonction de <math>x</math> ) à l'aide de la première ou de la deuxième équation</li> <li>Remplacer ensuite <math>x</math> par cette expression dans la deuxième équation, ce qui permet de trouver <math>y</math>.</li> <li>Calculer <math>x</math> en utilisant la valeur de <math>y</math></li> <li>Vérifier que le couple <math>(x; y)</math> trouvé est bien solution du système</li> <li>Conclure</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>(L_2)</math> permet d'écrire : <math>x = 9 - 3y</math></li> <li>En remplaçant <math>x</math> par <math>9 - 3y</math> dans <math>(L_1)</math>, on obtient :  <math>3(9 - 3y) - 2y = 5</math>  <math>\Leftrightarrow 27 - 9y - 2y = 5</math>  <math>\Leftrightarrow 22 = 11y</math>  <math>\Leftrightarrow y = 2</math></li> <li>En remplaçant <math>y</math> par 2 dans <math>x = 9 - 3y</math>, on obtient : <math>x = 9 - 3 \times 2 = 9 - 6 = 3</math></li> <li>On vérifie que le couple <math>(3; 2)</math> est solution du système (S) :  <math>3 \times 3 - 2 \times 2 = 9 - 4 = 5</math>  <math>3 + 3 \times 2 = 3 + 6 = 9</math></li> <li>Le couple <math>(3; 2)</math> est donc l'unique solution du système (S)</li> </ul>	<p>Il ne faut pas partir tête baissée ... Il faut essayer de choisir l'expression qui facilite le plus les calculs.</p> <p>On obtient une équation à une inconnue (<math>y</math> ici)</p> <p>On a trouvé <math>y</math></p> <p>On a trouvé <math>x</math></p> <p>Attention à l'ordre !</p>

**Remarque :** une résolution par équivalence présentée comme ci-dessous, permet d'éviter de faire une vérification.

$$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5 \\ x=9-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(9-3y)-2y=5 \\ x=9-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27-9y-2y=5 \\ x=9-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22=11y \\ x=9-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=3 \end{cases}$$

### RÉSOLUTION PAR COMBINAISON (OU ÉLIMINATION)

MÉTHODE	RÉSOLUTION	COMMENTAIRES
<ul style="list-style-type: none"> <li>Multiplier les deux équations par des nombres bien choisis afin d'obtenir le même coefficient devant <math>x</math> (ou <math>y</math> si c'est plus simple)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>On multiplie les deux membres de l'équation <math>(L_2)</math> par 3. On obtient :               <math display="block">\begin{cases} 3x-2y=5(L1) \\ 3(x+3y)=3 \times 9(L2 \leftarrow 3L2) \end{cases}</math> <math display="block">\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5(L1) \\ 3x+9y=27(L2) \end{cases}</math> </li> </ul>	<p>Cette écriture signifie que l'on a multiplié les 2 membres de l'équation <math>(L_2)</math> par 3 et que l'on a remplacé l'équation <math>(L_2)</math> par <math>(3L_2)</math></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Soustraire (ou additionner) membre à membre pour éliminer <math>x</math> (ou <math>y</math>)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>On soustrait membre à membre <math>(L_2)</math> à <math>(L_1)</math> ; On obtient :               <math display="block">3x-2y-(3x+9y)=5-27</math> <math display="block">\Leftrightarrow -11y=-22</math> <math display="block">\Leftrightarrow y=2</math> </li> </ul>	<p>On a trouvé <math>y</math></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Remplacer <math>y</math> par sa valeur dans une des équations.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>On remplace <math>y</math> par 2 dans <math>(L_1)</math>. On obtient :               <math display="block">3x-2 \times 2=5</math> <math display="block">\Leftrightarrow 3x=9</math> <math display="block">\Leftrightarrow x=3</math> </li> </ul>	<p>On a trouvé <math>x</math></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Vérifier que le couple <math>(x; y)</math> trouvé est bien solution du système</li> <li>Conclure</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>... déjà vu !</li> <li>... ça aussi !</li> </ul>	

**Remarque :** une résolution par équivalence présentée comme ci-dessous, permet d'éviter de faire une vérification.

$$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5(L1) \\ 3(x+3y)=39(L2 \leftarrow 3L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5(L1) \\ 3x+9y=27(L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5(L1) \\ -11y=-22(L2 \leftarrow L1-L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2 \times \left(\frac{27}{11}\right) + 5(L1) \\ y=\frac{22}{11}(L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$